Capítulo I – Vetores Cartesianos

Capítulo II – Vetor Posição

Capítulo III – Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

Capítulo IV – Produto Escalar

Capítulo V – Equilíbrio de um Ponto Material

Capítulo VI – Momento de uma Força Escalar

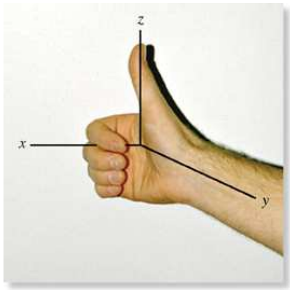
Capítulo VII – Sistemas de Força e Momentos

Capítulo VIII – Reações de Apoio de Estruturas Isostáticas

Capítulo I – Vetores Cartesianos

Sistemas de Coordenadas Utilizando a Regra da Mão Direita.

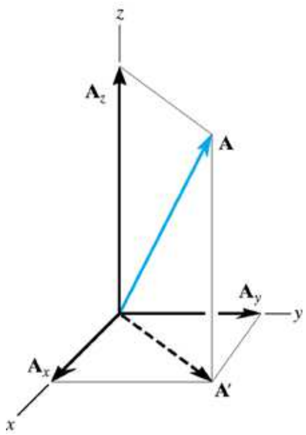
Esse sistema será usado para desenvolver a teoria da álgebra vetorial.



Sistema de coordenadas da mão direita

Componentes Retangulares de um Vetor

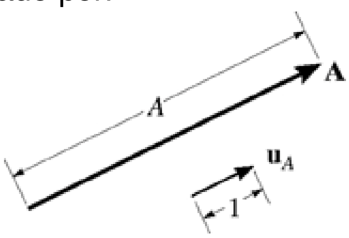
Um vetor A pode ter um, dois ou três componentes ao longo dos eixos de coordenadas x, y, z dependendo de como está orientado em relação aos eixos.



$$A = A' + A_z$$
$$A' = A_x + A_y$$
$$assim:$$
$$A = A_x + A_y + A_z \qquad \text{(I)}$$

Vetores Unitários

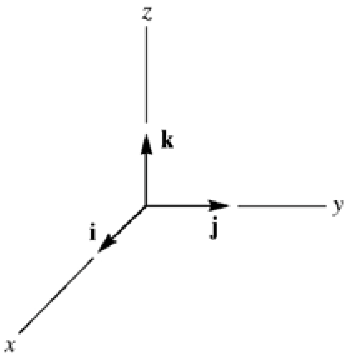
A direção de A é especificada usando-se o vetor unitário. Se A é um vetor com intensidade A ≠ 0, então o vetor unitário que tem a mesma direção de A é representado por:



$$uA = \frac{\mathrm{A}}{A} \qquad \text{(II)}$$

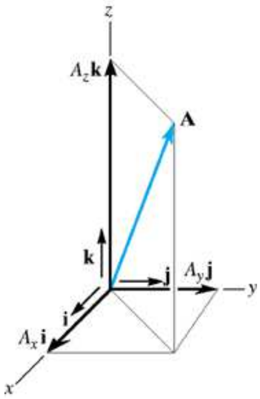
Vetores Cartesianos Unitários

Em três dimensões, o conjunto de vetores unitários, i, j, k é usado para designar as direções dos eixos x, y, z, respectivamente. Esses vetores serão descritos analiticamente por um sinal positivo ou negativo dependendo da orientação do vetor. Os vetores cartesianos unitários positivos estão representados abaixo.



Representação de um Vetor Cartesiano

Como as três componentes de A, figura abaixo, atuam nas direções positivas i, j, k pode-se escrever A sob a forma de vetor cartesiano como:

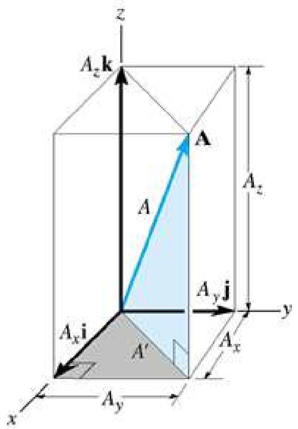


$$A = A_x i + A_y j + A_z k \qquad \text{(III)}$$

Dessa forma, as componentes do vetor estão separadas e, como resultado, simplifica as operações de álgebra vetorial, particularmente em três dimensões.

Intensidade de um Vetor Cartesiano

É sempre possível obter a intensidade de A, desde que ele esteja expresso sob a forma vetorial cartesiana. Pela figura abaixo temos:



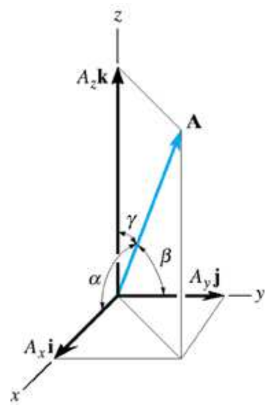
$$A = \sqrt{A'^2 + A^2{}_z}$$
$$A' = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y}$$
$$assim:$$
$$A = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z} \qquad \text{(IV)}$$

Portanto, a intensidade de A é igual a raiz quadrada positiva da soma dos quadrados de seus componentes.

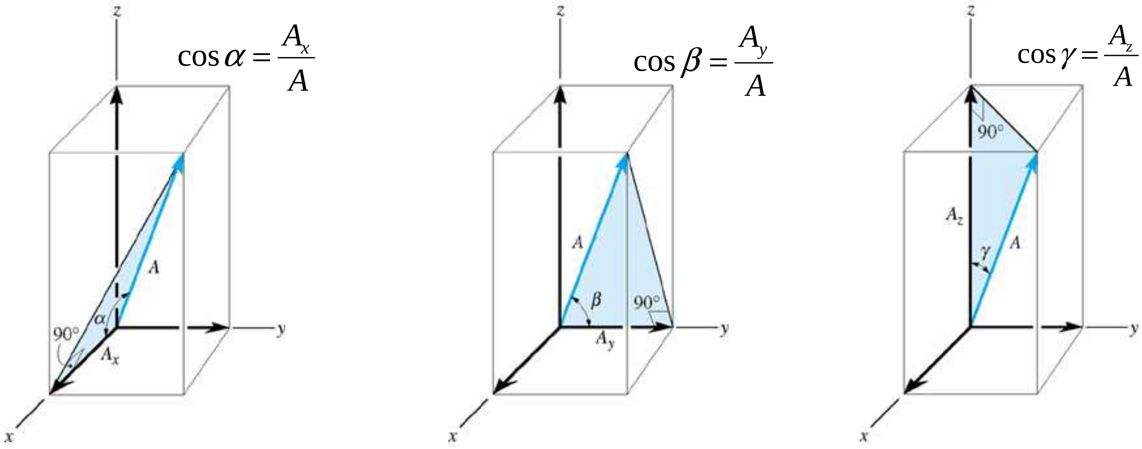
Direção de um Vetor cartesiano

A direção de A é definida pelos ângulos diretores coordenados α (alfa), β (beta) e γ (gama), medidos entre a origem de A e os eixos positivos x, y, z localizados na origem de A.

Observe que cada um desses ângulos está entre 0º e 180º, Independentemente da orientação de A.



Para determinarmos α (alfa), β (beta) e γ (gama), vamos considerar a projeção de A sobre os eixos x, y, z . Com referência aos triângulos retângulos sombreados mostrados em cada uma das figuras temos:



(a) (b) (c)

Uma maneira fácil de se obter os cossenos diretores de A é criar um vetor unitário na direção de A, equação (II). Desde que A seja expresso sob a forma de vetor cartesiano, equação III:

$$uA = \frac{\mathrm{A}}{A} \quad \text{(II)}$$

$$A = A_x i + A_y j + A_z k \quad \text{(III)}$$

$$uA = \frac{\mathrm{A}}{A} = \frac{A_x}{A} i + \frac{A_y}{A} j + \frac{A_z}{A} k \quad \text{(VI)}$$

Onde:

$$A = \sqrt{A^2{}_X + A^2{}_Y + A^2{}_z} \quad \text{(IV)}$$

Por comparação com as equações (V), vemos que os componentes de *uA (i, j,* k), representam os cossenos diretores de A, isto é:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}; \cos\beta = \frac{A_y}{A}; \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \quad \text{(V)}$$

$$uA = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k \quad \text{(VII)}$$

Como a Intensidade de A é igual a raiz quadrada positiva da soma dos quadrados da intensidade dos componentes e *uA* tem intensidade 1, então:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{(VIII)}$$

Finalmente, se a intensidade e os ângulos da coordenada de direção de A são dados, A pode ser expresso sob forma vetorial cartesiana como:

$$A = uA$$
$$A = A\cos\alpha i + A\cos\beta j + A\cos\gamma k \quad \text{(IX)}$$

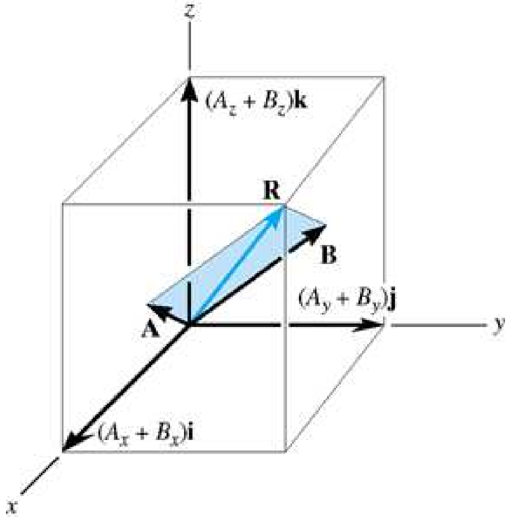
Adição e Subtração de Vetores Cartesianos

Essas operações são simplificadas se os vetores são expressos em função de seus componentes cartesianos. Por exemplo, se:

- $A = A_x i + A_y j + A_z k$ e $B = B_x i + B_y j + B_z k$, então o vetor resultante R tem componentes que representam as somas escalares de *i, j, k* de A e B. Ou seja:
- $R = A \pm B = (A_x \pm B_x)i + (A_y \pm B_y)j + (A_z \pm B_z)k$

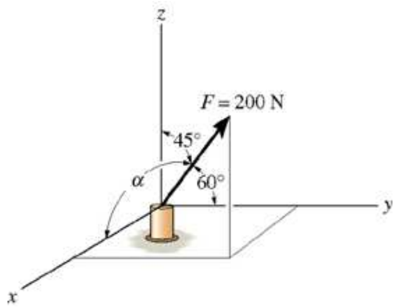
Generalizando:

$$F_R = \Sigma F = \Sigma F_X i + F_Y j + F_Z k$$

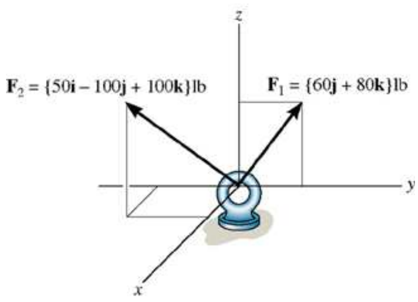


Exercícios:

1. Expresse a força F, mostrada na Figura abaixo, como um vetor cartesiano.

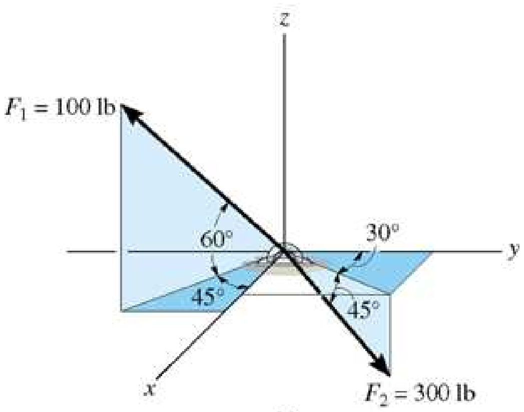


2. Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o anel, conforme a figura abaixo.

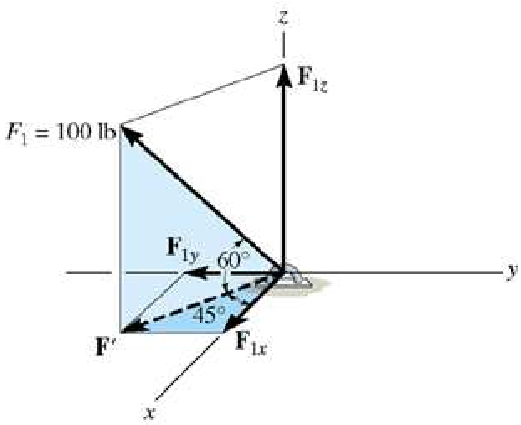


(a)

3. Expresse a força F1, mostrada na figura abaixo, como vetor cartesiano.

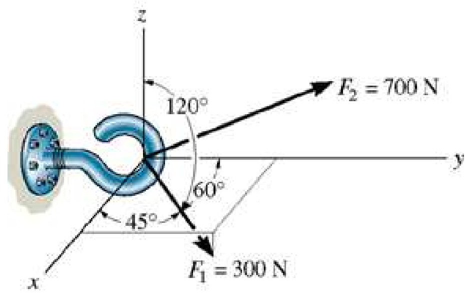


(a)



(b)

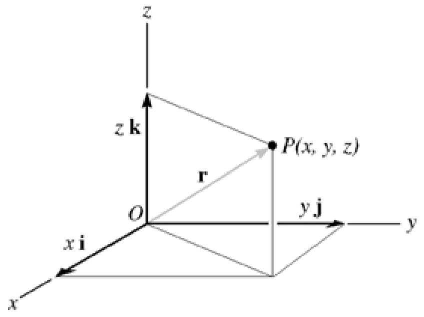
4. Duas forças atuam sobre o gancho mostrado abaixo. Especifique os ângulos diretores coordenados de F2, de modo que a força resultante Fr atue ao longo do eixo positivo y e tenha intensidade de 800 N.



(a)

Capítulo II – Vetor Posição

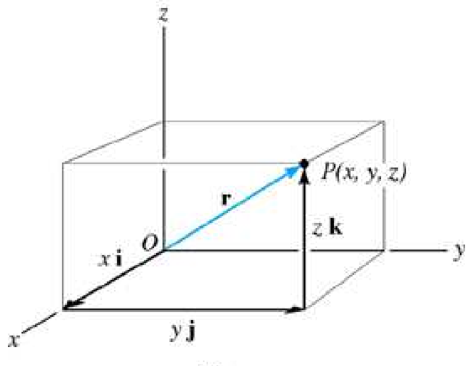
O vetor posição ***r*** é definido como um vetor fixo que localiza um ponto no espaço em relação a outro ponto. Por exemplo, se r estende-se da origem de coordenadas, O, para o ponto P (x, y, z), figura abaixo, então ***r*** pode ser expresso na forma de vetor cartesiano como:



(a)

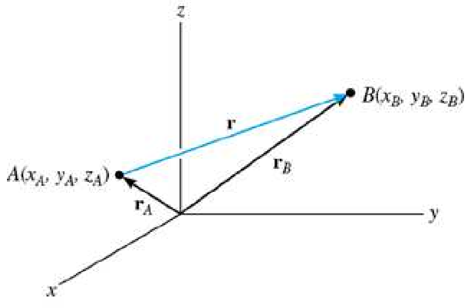
r = x**i** + y**j** + z**k**

Observe que a adição de vetor da origem para a extremidade dos três componentes resulta do vetor ***r***, figura abaixo. Começando na origem, O, desloca-se sobre ***x*** na direção ***+i***, depois sobre ***y*** na direção ***+j*** e finalmente sobre ***z*** na direção ***+k*** para atingir o ponto P(x, y, z).



(b)

Em geral, o vetor posição é orientado do ponto **A** para o ponto **B** no espaço, figura abaixo. Como uma questão de convenção esse vetor é designado pelo símbolo ***r***, algumas vezes serão utilizados *índices subscritos* para indicar o ponto de origem e o ponto para o qual está orientado. Assim, ***r*** também será designado ***r***AB. Observe também que ***r***A e ***r***B, são escritos com apenas um índice, visto que se estendem a partir da origem das coordenadas.

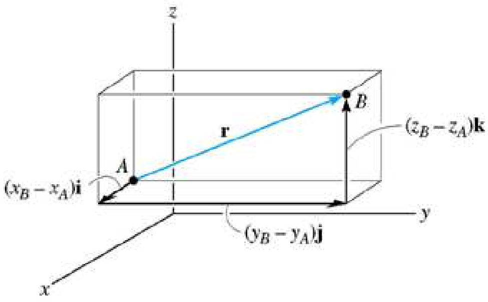


(a)

Da figura anterior, pela adição de vetores ponta-cauda, é necessário que:

- ***r***A + ***r*** = ***r***B

Resolvendo-se em ***r*** e expressando-se ***r***A e ***r***B na forma vetorial cartesiana, tem-se:

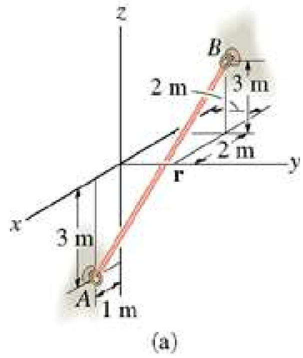


(b)

- **Na Prática**: O comprimento e a direção do cabo AB usado para suportar a chaminé são determinados medindo-se as coordenadas dos pontos A e B e usando-se os eixos x, y, z.
- O vetor posição ***r*** ao longo do cabo é então estabelecido. A intensidade ***r*** representa o comprimento do cabo e a direção dele é definida por **a, b, g**, que são determinados pelos componentes do vetor unitário calculados a partir do vetor unitário ***u***.

- **Exercício**

Uma fita elástico está presa aos pontos A e B, como mostra a Figura abaixo. Determine seu comprimento e sua direção, medidos de A para B.

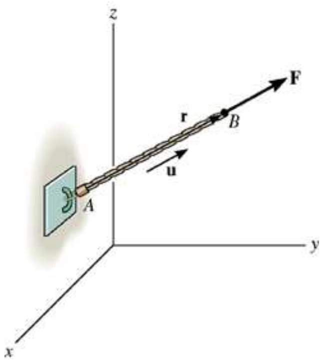


(a)

Capítulo III – Vetor Força Orientado ao Longo de uma Reta

Pode-se definir ***F***, como sendo um vetor cartesiano pressupondo que ele tenha ***mesma direção e sentido*** que o vetor **posição *r*** orientado do ponto A para o ponto B da corda, Figura abaixo. Essa direção comum é especificada pelo vetor unitário ***u***, então:

$$\vec{F} = F\vec{u} = F\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

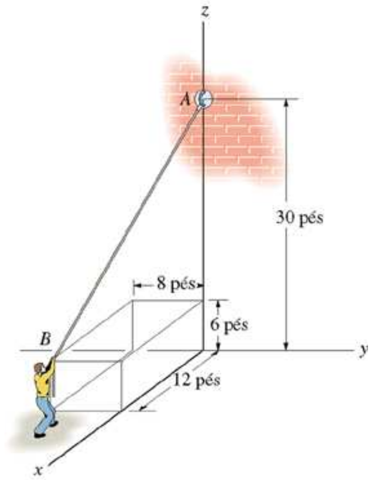


- ***F*** , unidade de força;
- ***r***, unidade de comprimento.

- **Na Prática**: A força F que atua ao longo da corrente pode ser representada como um vetor cartesiano definindo-se primeiro os eixos x, y, z, formando-se um vetor posição ***r*** ao longo do comprimento da corrente e determinando-se depois o vetor unitário ***u*** correspondente que define a direção tanto da corrente quanto da força. Finalmente, a intensidade da força é combinada com sua direção, ***F*** = **F*u***.

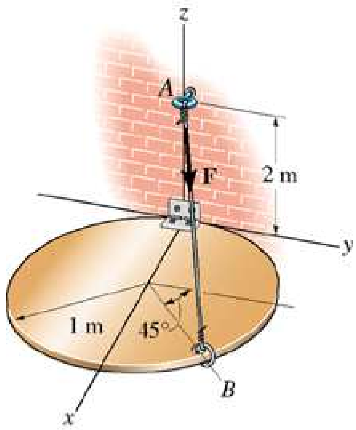
Exercício

O homem mostrado na Figura abaixo puxa a corda com uma força de 70 lb. Represente essa força, que atua sobre o suporte A, como vetor cartesiano e determine sua direção.



(a)

A placa circular abaixo é parcialmente suportada pelo cabo AB. Se a força do cabo no gancho A dor de F = 500 N, expresse ***F*** como vetor Cartesiano.

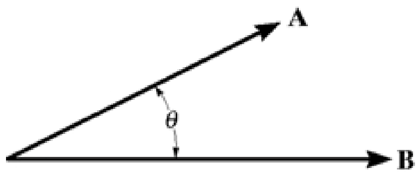


(a)

Capítulo IV – Produto Escalar

O produto de vetores ***A*** e ***B***, escrito ***A.B*** e lido como "***A*** escalar ***B***", é definido como o produto das intensidades de A e de B e do Cosseno do ângulo θ entre suas origens. Expresso na forma de equação:

- ***A.B*** = *AB*.cos θ
  Onde 0º ≤ θ ≤ 180º.



- **Leis das Operações**
- Lei Comutativa:

A.B = B.A

- Multiplicação por Escalar:

a.(A.B) = (a.A).B = A.(a.B) = (A.B).a

- Lei Distributiva:

A.(B + D) = (A.B) + (A.D)

- **Definição de Vetor Cartesiano**

A equação utilizada: ***AB*.cos θ**

i.i = 1 . 1 . cos 0º = 1 e i.j = 1 . 1 . cos 90º = 0;

Daí temos que:

i . i = 1	j . j = 1	k . k = 1
i . j = 0	j . k = 0	k . j = 0

Dessa forma temos que o produto escalar:

A . B = (Axi + Ayj + Azk) . (Bxi + Byj + Bzk)

Tem como resultado:

A.B = Ax.Bx + Ay.By + Az.Bz

- **Aplicações:**

O produto escalar tem duas aplicações importantes:

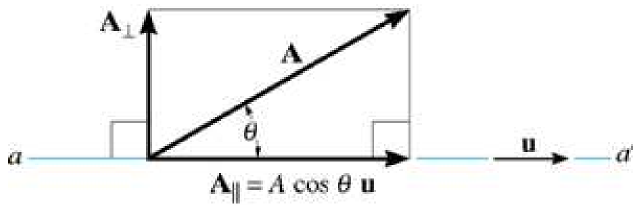
1 - Determinar o ângulo entre dois vetores ou reta que se interceptam. O ângulo θ entre as origens pode ser determinado pela equação:

$$\theta = \arccos\left(\frac{A.B}{AB}\right); \qquad 0^0 \le \theta \le 180^0$$

2 – Determinar os componentes paralelo e perpendicular de vetor a uma reta.

Componente Paralelo:

A|| = A.cos θ = ***A.u***



Portanto, a projeção escalar de ***A*** ao longo de uma reta é determinada pelo produto escalar de ***A*** e o vetor unitário ***u*** que define a direção da reta.

Dessa forma o componente A || representado como um vetor é:

- ***A*** || = A.cos θ **u**= (***A.u)u***

Componente Perpendicular:

O componente perpendicular a reta **aa'** pode ser obtido de duas maneiras:

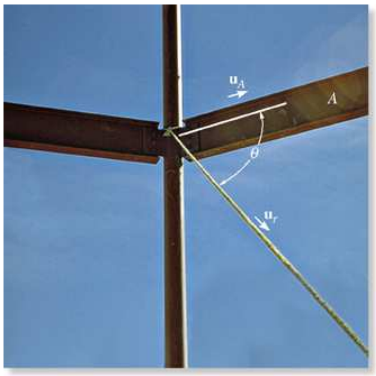
$$\theta = \arccos\left(\frac{Au}{A}\right); \text{ então}: A\perp = A.sen\theta;$$

Da mesma forma se **A** || for conhecido, então, pelo teorema de Pitágoras, pode-se escrever:

$$A\perp = \sqrt{A^2 - A_{\parallel}^{\,2}};$$

- **Na Prática:**
- O ângulo θ entre a corda e a viga **A** pode ser determinado usando-se 0 produto escalar. Definem-se os **vetores posição** ou **vetores unitários** ao longo da viga, $u_A = \dfrac{\vec{r}_A}{r_A};$
- e ao longo da corda, $u_r = \dfrac{\vec{r}_r}{r_r};$ como θ é definido entre as caudas desses vetores, pode-se resolver em θ usando-se:

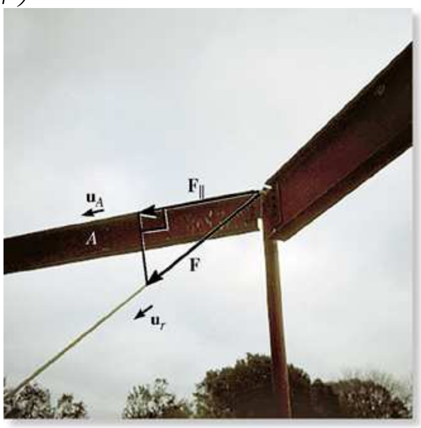
$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{r}_A.\vec{r}_r}{r_A r_r}\right) = \arccos u_A.u_r;$$



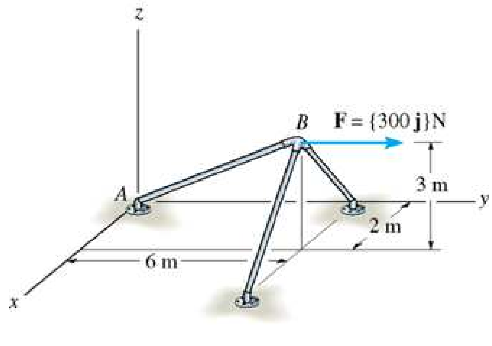
- **Na Prática:**
- Se a corda exerce uma força F sobre a junta, a projeção dessa força ao longo da viga A pode ser determinada definindo-se primeiro a direção da viga, usando-se um vetor unitário $u_A = \dfrac{\vec{r}_A}{r_A};$ e depois definindo-se a

força como um vetor cartesiano, $F = F.\left(\dfrac{\vec{r}_r}{r_r}\right) = Fu_r.$ Aplicando-se o produto escalar, a projeção será:

$$F_{\parallel} = Fu_A.$$

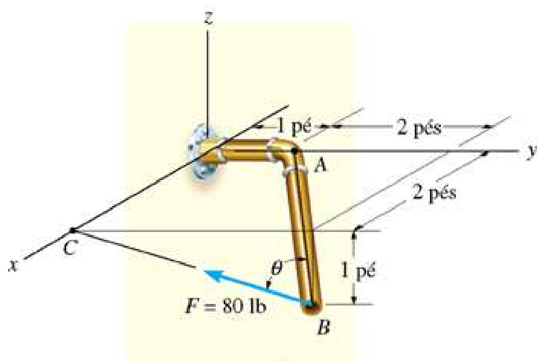


- Exercício:
- A estrutura mostrada abaixo está submetida a uma força horizontal F = {300j}N. Determine a intensidade dos componentes da força paralela e perpendicular ao elemento AB.



(a)

- O tubo da Figura abaixo está sujeito a força F = 80 lb. Determine o ângulo θ entre ***F*** e o seguimento BA do tubo e as grandezas dos componentes de ***F***, que são paralelos e perpendiculares a BA.



(a)

Capítulo V – Equilíbrio de um Ponto Material

- **Condição de Equilíbrio:** $\Sigma F_x = 0$

$$\Sigma F_y = 0$$

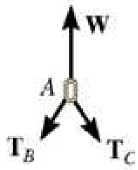
- Ou; $\Sigma F_x i = 0$

$$\Sigma F_y j = 0$$

$$\Sigma F_z k = 0$$

- **Diagrama de Corpo Livre**

Desenho que exprime o ponto material com todas as forças que atuam sobre ele.



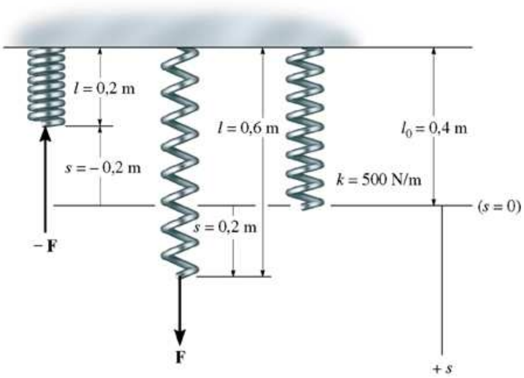
- **Molas**

Seu comprimento, ***s***, variará proporcionalmente a carga solicitante, ***F***, e seu coeficiente de deformação linear, ou seja, a constante da mola ou rigidez, representada pela letra ***k***.

$$F = k.s$$

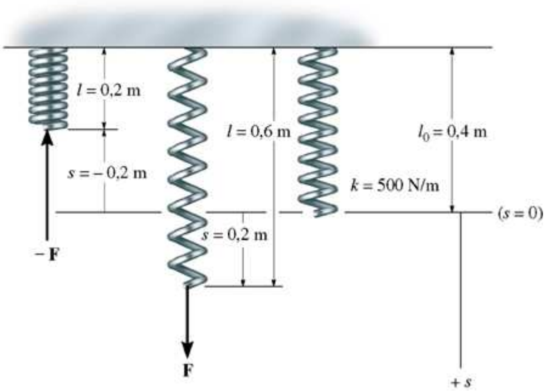
A distância, **s**, é definida pela diferença entre o comprimento deformado da mola, l, e seu comprimento inicial, l_0, isto é, **s** = $l - l_0$.

Se **s** for positivo, ***F*** puxa a mola, se for negativo ***F*** empurra a mola.

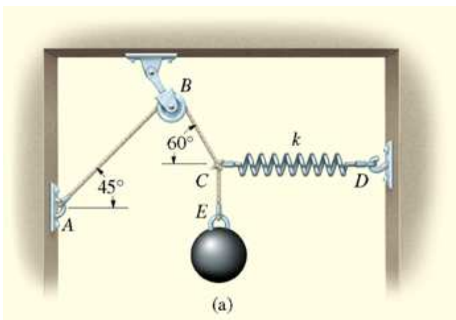


Exercício

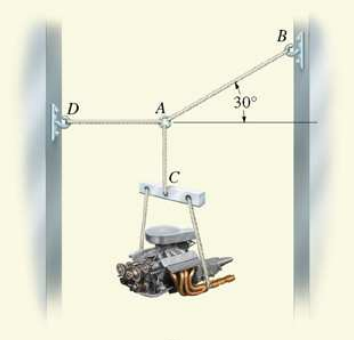
Para a mola de comprimento inicial igual a 40 cm e constante igual a 500N/m, determine a força necessária para deixá-la com comprimento de 60 cm.



A esfera da figura abaixo tem **massa** de 6 kg e está apoiada como mostra. Desenhe a diagrama de corpo livre da esfera, da corda CE e do nó em C. (g = 9,81m/s2).

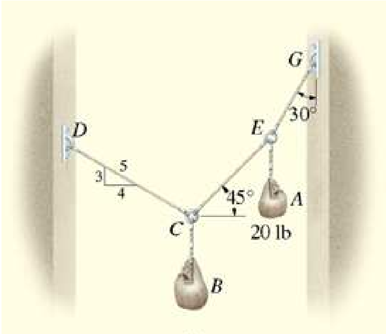


Determine a tensão nos cabos AB e AD para que o equilíbrio do motor de 250 kgf mostrado abaixo.



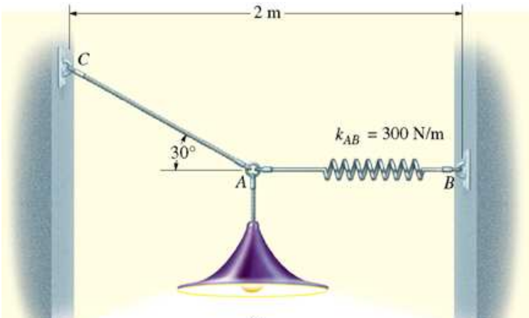
(a)

Se o saco da figura abaixo tiver peso de 20 lb em A, determine o peso dele em B e a força necessária em cada corda para manter o sistema na posição de equilíbrio mostrada.



(a)

Determine o comprimento da corda AC da figura abaixo, de modo que a luminária de 8 kg seja suspensa na posição mostrada. O comprimento não deformado da mola AB é lAB = 0,40 m e a mola tem rigidez kAB = 300 N/m.



(a)

✖ Sistemas de Força Tridimensional

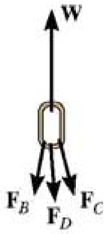
- Para equilíbrio de um ponto material é necessário:

$$\Sigma F = 0$$

- Quando as forças estivem decompostas em seus componentes **i, j, k** teremos: $$\Sigma F_x i + \Sigma F_y j + \Sigma F_z k = 0$$

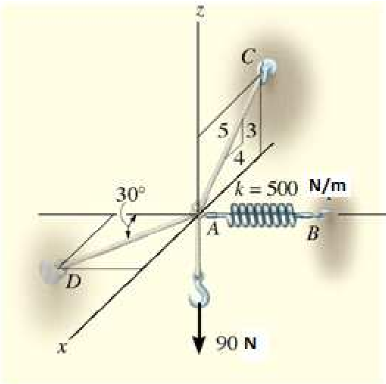
- Para garantia do equilíbrio é necessário satisfazer as equações escalares:

$$\Sigma F_x i = 0$$
$$\Sigma F_y j = 0$$
$$\Sigma F_z k = 0$$



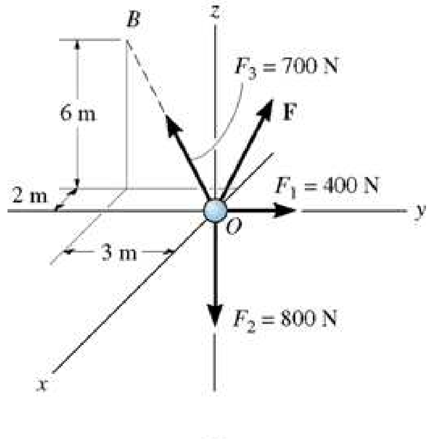
✖ Exercício

Uma carga de 90 N está suspensa pelo gancho mostrado na figura abaixo. A carga é suportada por dois cabos e por uma mola com rigidez k = 500 N/m. Determine a força nos cabos e a deformação da mola para a condição de equilíbrio. O cabo AD está localizado no plano x-y e o cabo AC no plano x-z.



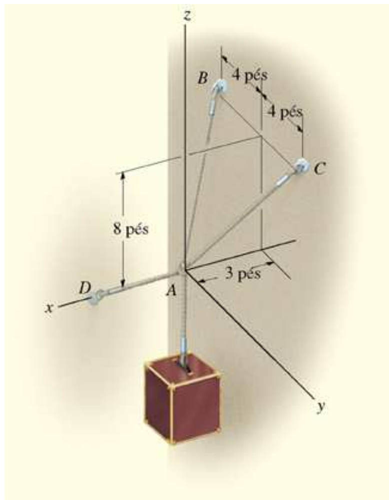
(a)

Determine a intensidade e os ângulos dos sentidos das coordenadas da força F da figura abaixo necessários para o equilíbrio do ponto material O.



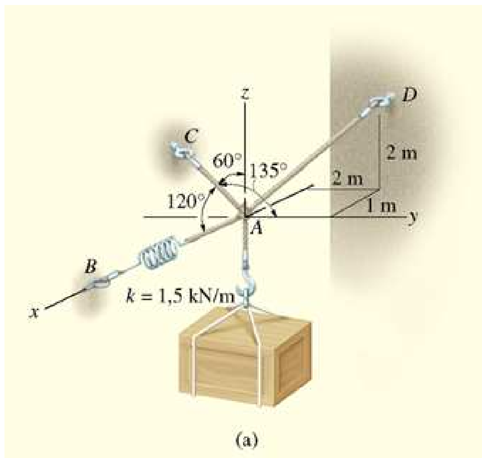
(a)

Determine a força desenvolvida em cada cabo usado para suportar a caixa de 40 lb mostrada na figura abaixo.



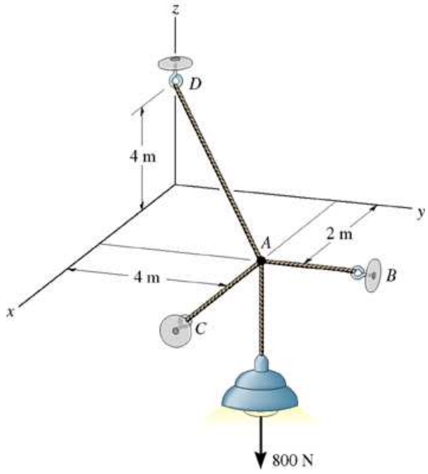
(a)

A caixa de 100kgf abaixo, é suportada por três cordas, uma delas acoplada à mola mostrada. Determine a força nas cordas AC e AD e a deformação da mola.



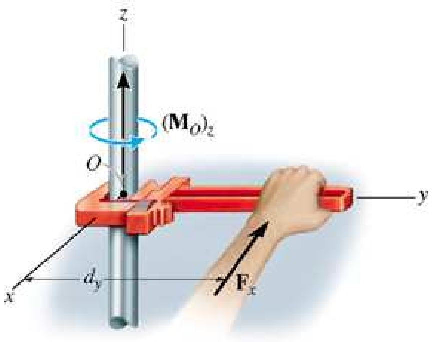
(a)

Os três cabos são usados para suportar a luminária de 800 N. Determine a força desenvolvida em cada cabo para a condição de equilíbrio.

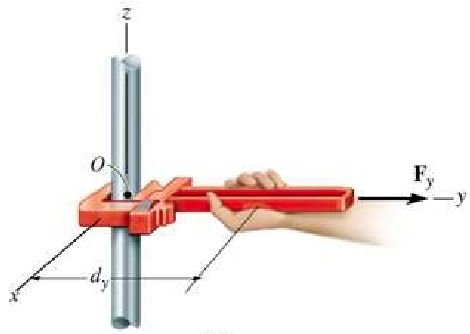


Capítulo VI – Momento de uma Força Escalar

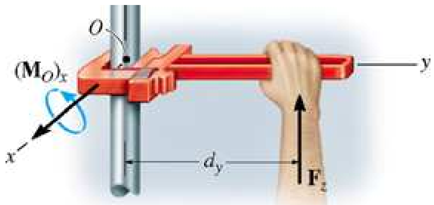
- Formulação Escalar



(a)

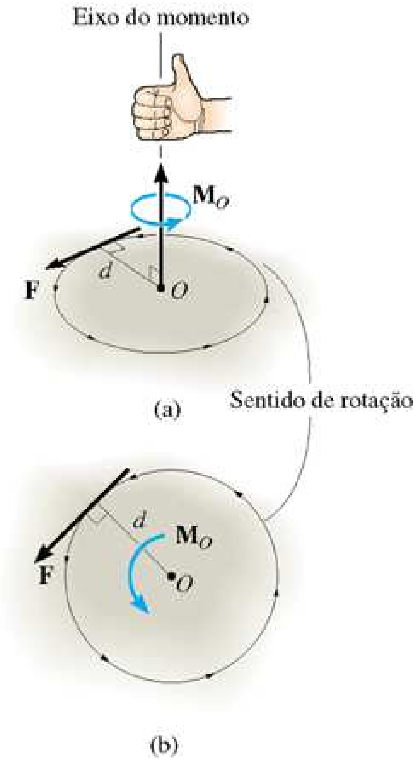


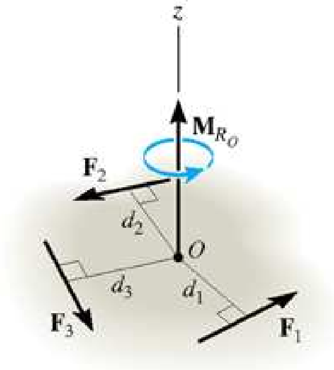
(c)



(b)

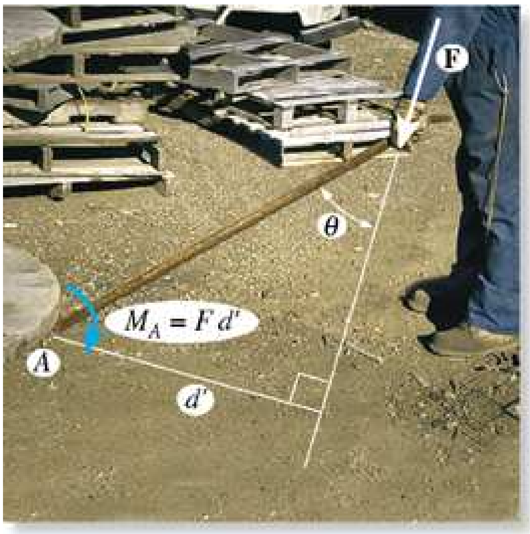
- $M_0 = F.d$

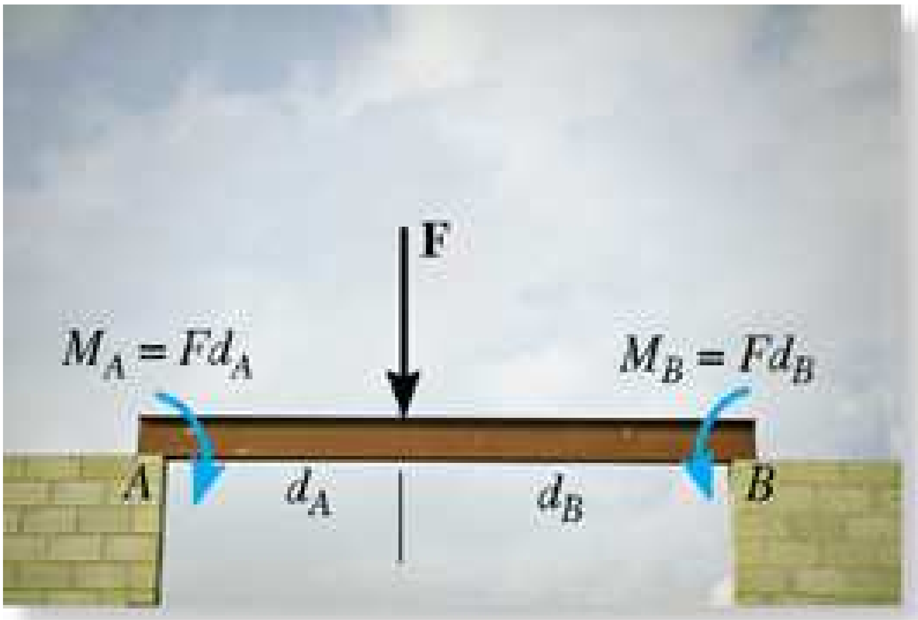




- $M = F.d$

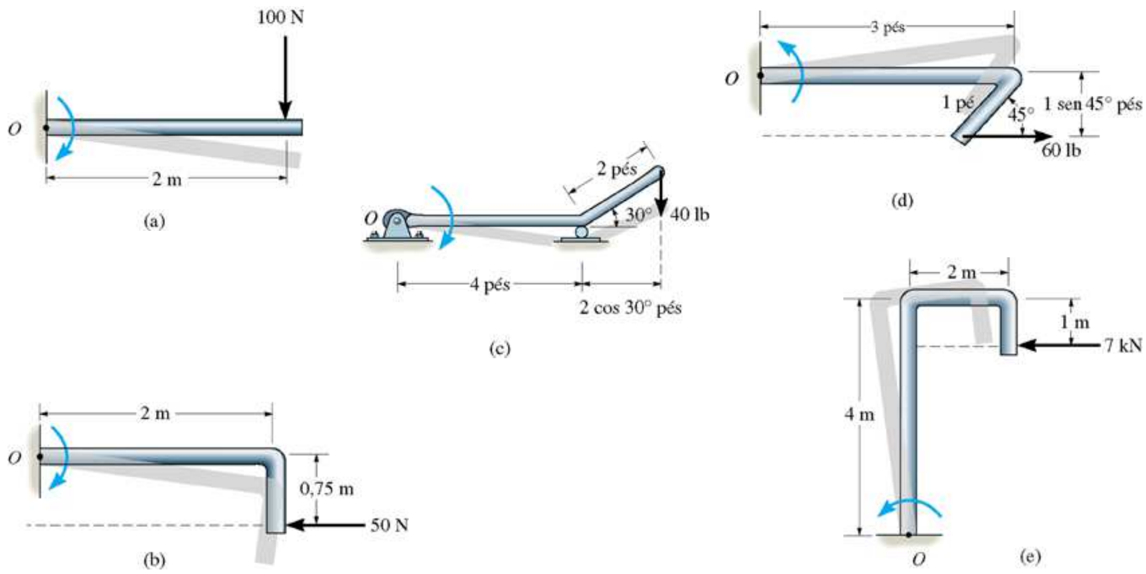
$$M_R = \sum F.d$$



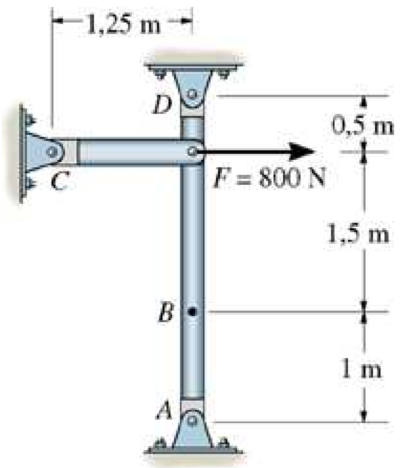


Exercício

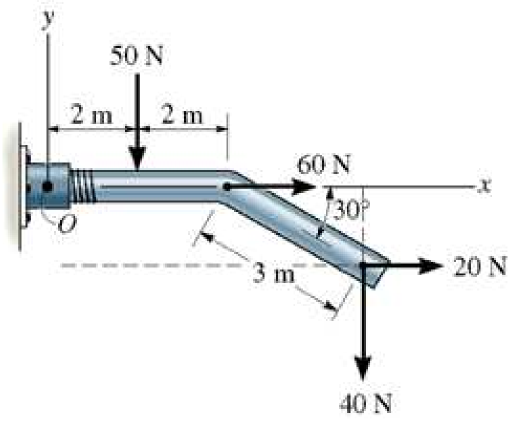
Determine o momento da força em relação ao ponto 0 em cada caso ilustrado abaixo.



Determine os momentos da força 800 N que atua sobre a estrutura na figura abaixo em relação aos pontos A, B, C e D.



Determine o momento resultante, das quatro forças que atuam no haste abaixo, em relação ao ponto 0.



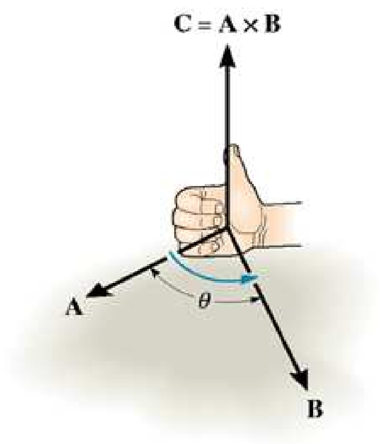
- Formulação Vetorial

O produto vetorial de dois vetores ***A*** e ***B*** produz um vetor ***C***.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

A Intensidade de ***C*** é definida como o produto das intensidades de ***A*** e ***B*** e o seno do ângulo θ entre os dois vetores, prolongando-os, se necessário de modo que suas origens se localizem no mesmo ponto ($0 \leq \theta \leq 180º$).

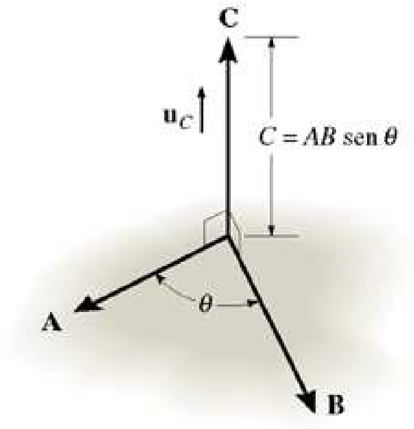
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{sen}\ \theta)$$



Direção e Sentido: O vetor ***C*** tem direção perpendicular ao plano contendo ***A*** e ***B***, de modo que seu sentido é determinado pela regra da mão direita. Conhecendo a intensidade, direção e o sentido de **C**, podemos escrever:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{sen}\ \boldsymbol{\theta}).\mathbf{uc}$$

Onde o escalar ***A.B.senθ*** define a intensidade de **C** e o vetor unitário **u**c define sua direção e seu sentido.



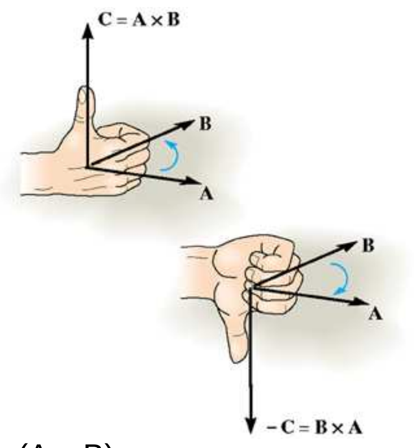
- **Leis de Operação**:

1 . O produto vetorial é não-comutativo, isto é:

A x B ≠ B x A,

- Ou seja:

A x B = -B x A.



2. Multiplicação por escalar:

a.(A x B) = (a.A) x B = A x (a.B) = (A x B).a

3. Lei distributiva:

A x (B + D) = (A x B) + (A x D)

Formulação vetorial cartesiana:

i x j = k   i x k = -j   i x i = 0

j x k = i   j x i = -k   j x j = 0

k x i = j   k x j = -i   k x k = 0

- A x B = (Axi + Ayj + Azk) x (Bxi + Byj + Bzk)
- A x B = (AyBz - AzBy)i – (AxBz - AzBx)j + (AxBy - AyBx)k

- A equação anterior pode ser representada pela matriz abaixo:

$$AxB = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ Ax & \mathrm{Ay} & \mathrm{Az} \\ Bx & \mathrm{By} & \mathrm{Bz} \end{vmatrix}$$

- Para determinarmos os elementos i, j, k basta calcularmos os determinantes para esses termos:

- Para o elemento i:

$$\begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ A_x & \mathrm{A_y} & \mathrm{A_z} \\ B_x & \mathrm{B_y} & \mathrm{B_z} \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) i$$

- Para o elemento j:

$$\begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ A_x & \mathrm{A_y} & \mathrm{A_z} \\ B_x & \mathrm{B_y} & \mathrm{B_z} \end{vmatrix} = -(A_x B_z - A_z B_x) j$$

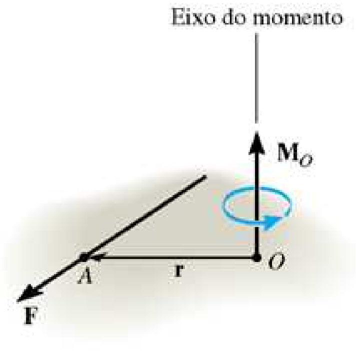
- Para o elemento k:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_x B_y - A_y B_x)k$$

Formulação Vetorial

- M0 = ***r*** x **F**

Sendo ***r*** um vetor posição traçado de 0 até qualquer ponto sobre a linha de ação de F.



(a)

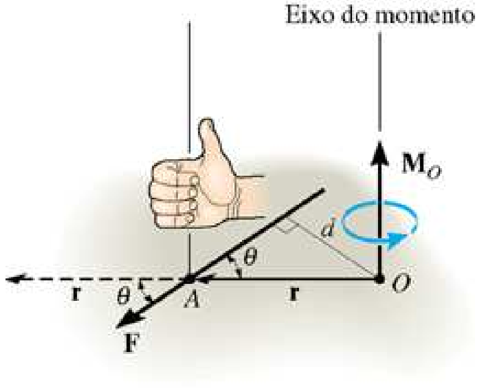
A Intensidade do produto vetorial é definida por:

- M0 = ***r*** x F. ***senθ***

O ângulo θ é medido entre as direções de ***r*** e **F**.

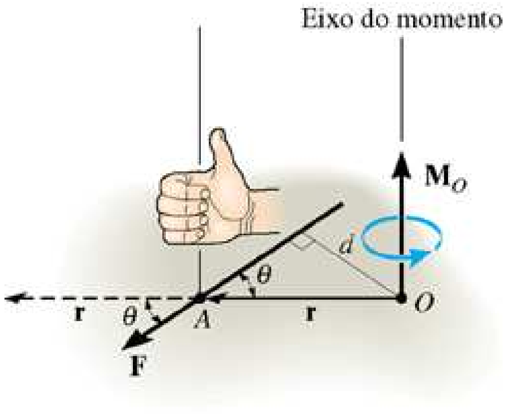
Uma vez que o braço de momento **d = *r*.*senθ***, então:

- M0 = ***r*** x F ***senθ*** = F.(***r*.*senθ***) = F.d



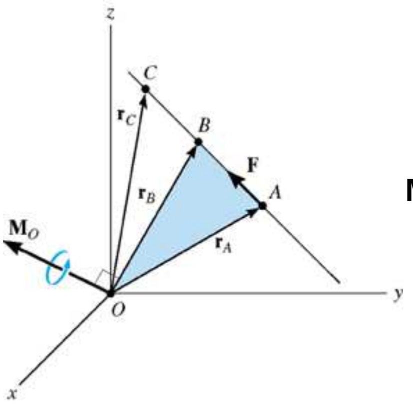
(b)

- Direção e sentido: São determinados pela regra da mão direita, com aplicação do produto vetorial.

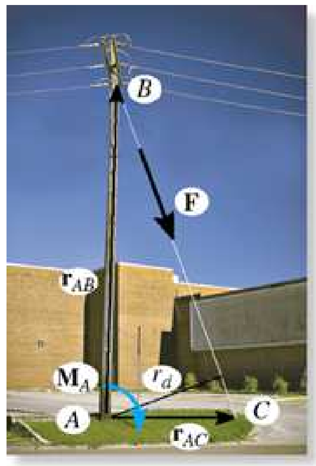


(b)

- **Princípios da Transmissibilidade:** O vetor ***F*** pode agir sobre qualquer ponto da sua linha de ação; e o vetor posição ***r***, pode ser aplicado em qualquer ponto pertencente a linha de ação de ***F***, dessa forma:



M0 = rb x F = rc x F



- Desenvolvendo a equação,
- **M0 = rb x F = rc x F**, teremos:

$$M_0 = r\mathrm{x}F = \begin{vmatrix} i & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ r_x & \mathrm{r_y} & \mathrm{r_z} \\ F_x & \mathrm{F_y} & \mathrm{F_z} \end{vmatrix}$$

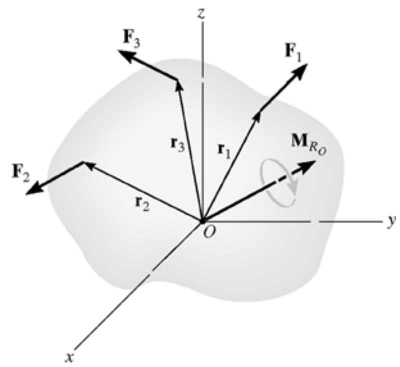
- rx, ry rz são os componentes x, y, z dos vetores posição traçado do ponto 0 até qualquer ponto sobre a linha de ação da força.

Fx, Fy Fz representam os componentes x, y, z do vetor força.

- **M0 = (ry Fz - rzFy)i – (rxFz - rzFx)j + (rxFy - ryFx)k**

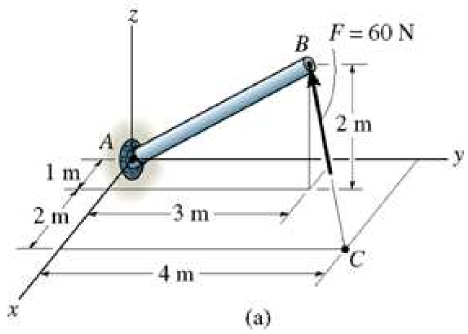
- **Momento resultante de um sistema de forças**:

Se um corpo está sujeito à ação de um sistema de forças, o momento resultante das forças em relação ao ponto 0 pode ser determinado pela soma vetorial dos momentos gerados por esse sistema.



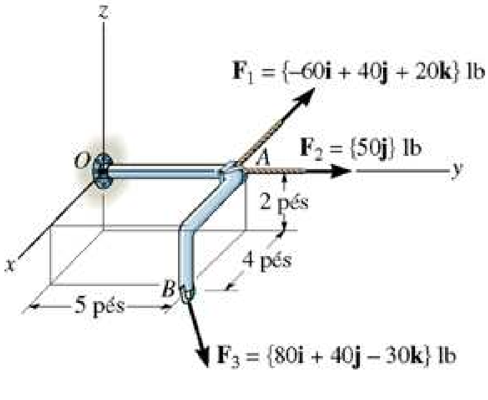
Exercício

O poste está sujeito a uma força de 60 N na direção C para B. Determine a intensidade do momento criado pela força em relação ao suporte em A.



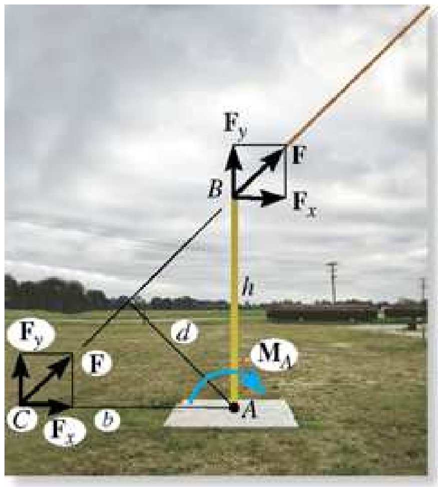
(a)

Três forças atuam na Barra mostrada, determine o momento resultante criado pelas forças em relação à flange em 0 e os ângulos diretores coordenados para o eixo do momento.



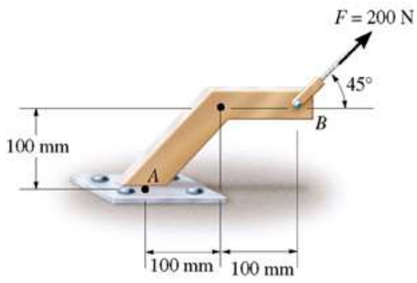
(a)

Teorema de Varignon: O momento de uma força em relação a um ponto é igual a soma dos momentos dos componentes das forças em relação ao mesmo ponto.



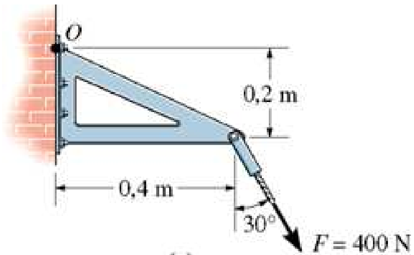
Exercício

Uma força de 200 N atua sobre o suporte abaixo. Determine o momento da força em relação ao ponto A.



(a)

A força F é aplicada nos terminais de cada suporte em ângulo mostrado na figura. Determine o momento da força em relação ao ponto 0.



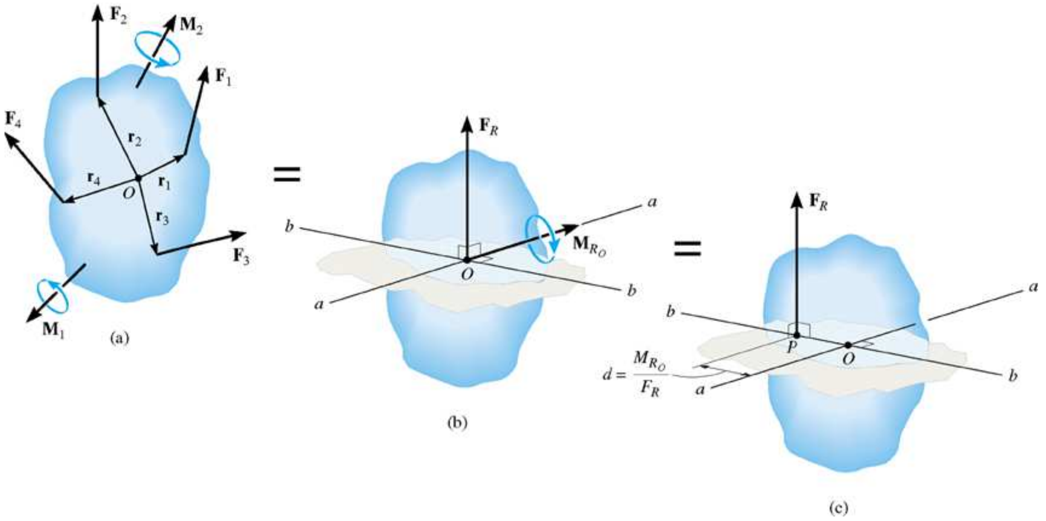
(a)

Capítulo VII – Sistemas de Força e Momentos

Análise do Sistema Força

- **Somatório dos Momentos**

O momento da força resultante em relação ao ponto O é igual à soma de todos os momentos no sistema.

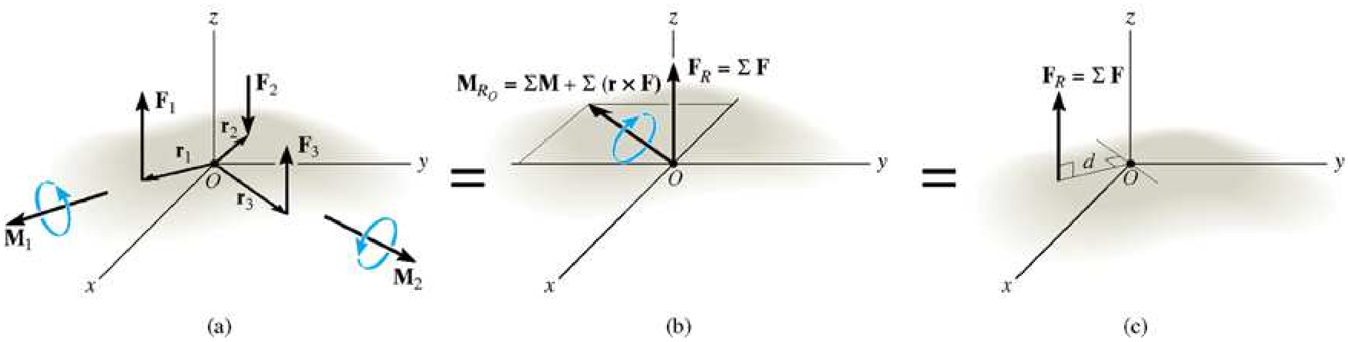


Formulação

$$FRx = \Sigma F_x$$

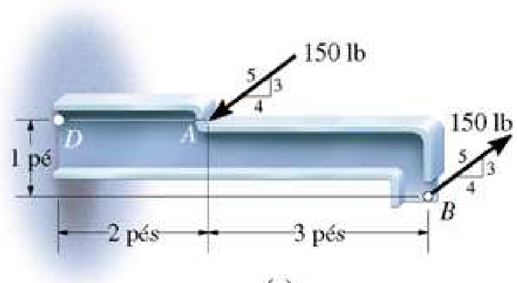
$$FRy = \Sigma F_y$$

$$M_{Ro} = \Sigma M_x + \Sigma M_y + \Sigma M_z$$



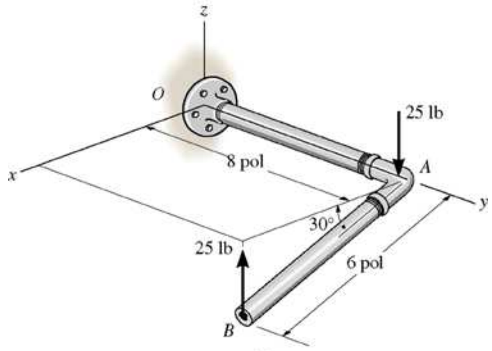
Exercício

Determine o momento de binário que age no elemento mostrado na figura abaixo.



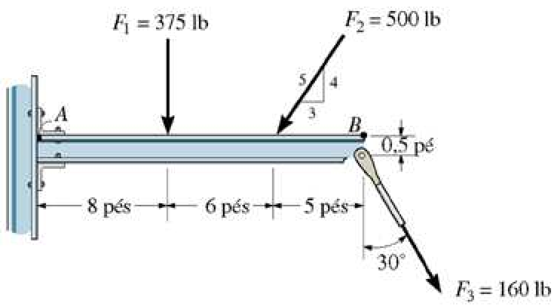
(a)

Determine o momento de binário que atua sobre a estrutura de tubos mostrada na figura abaixo.

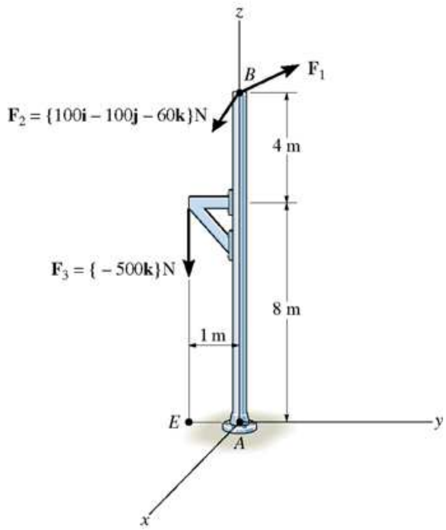


(a)

Determine o momento em relação ao ponto B de cada uma das três forças agindo sobre a viga e o momento resultante



Usando a análise vetorial cartesiana determine o momento resultante das três forças em relação à base da coluna em A. Dado F1 = {400i + 300j + 120K}N.



Capítulo VIII – Análise Estrutural de Estruturas Isostáticas

Cargas Atuantes nas Estruturas

Cargas Externas

Uma estrutura pode estar sujeita à ação de diferentes tipos de carga, tais como pressão do vento, reação de um pilar ou viga, as rodas de um veículo, o peso de mercadorias, etc. Estas cargas podem ser classificadas quanto à ocorrência em relação ao tempo e quanto às leis de distribuição.
Quanto à ocorrência em relação ao tempo:

Cargas Permanentes:

Atuam constantemente na estrutura ao longo do tempo e são devidas ao seu peso próprio, dos revestimentos e materiais que a estrutura suporta. Tratam-se de cargas com posição e valor conhecidos e invariáveis.

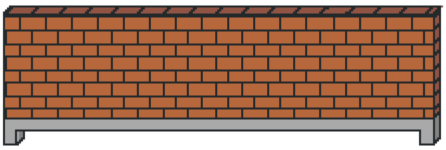


Figura 4.1 – Exemplo de carga permanente

Cargas Acidentais:

São aquelas que podem ou não ocorrer na estrutura e são provocadas por ventos, empuxo de terra ou água, impactos laterais, frenagem ou aceleração de veículos, sobrecargas em edifícios, peso de materiais que preencherão a estrutura no caso de reservatórios de água e silos, efeitos de terremotos, peso de neve acumulada (regiões frias), etc. Estas cargas são previstas pelas Normas em vigor.

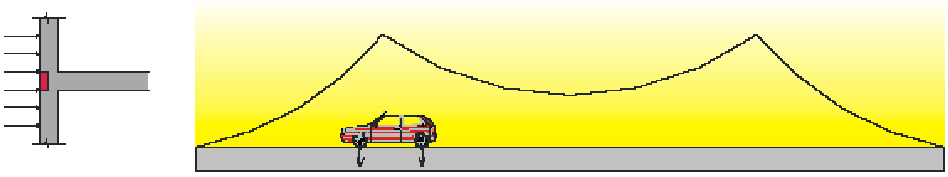


Figura 4.2 – Exemplo de carga acidental

4.1 Quanto às leis de distribuição:

Cargas concentradas:

São cargas distribuídas aplicadas a uma parcela reduzida da estrutura, podendo-se afirmar que são áreas tão pequenas em presença da dimensão da estrutura que podem ser consideradas pontualmente (ex.: a carga de um pilar de transição em uma viga, a roda de um automóvel, etc.).

Cargas distribuídas:

Podem ser classificadas em uniformemente distribuídas e uniformemente variáveis.

***Uniformemente distribuídas*:**

São cargas constantes ao longo ou em trechos da estrutura (ex.: peso próprio, peso de uma parede sobre uma viga, pressão do vento em uma mesma altura da edificação. etc.).

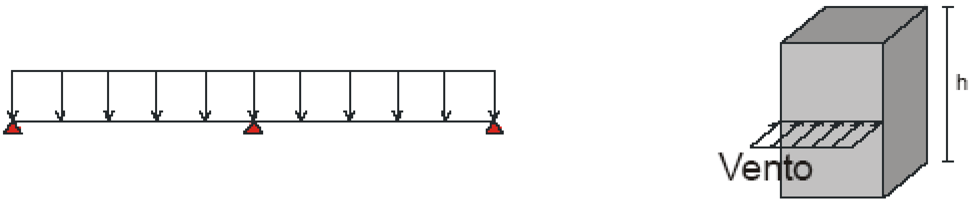


Figura 4.3 – Exemplo de carga uniformemente distribuída

***Uniformemente variáveis*:**

São cargas triangulares (ex.: carga em paredes de reservatório de líquido, carga de grãos a granel, empuxo de terra ou água, vento ao longo da altura da edificação, etc.).

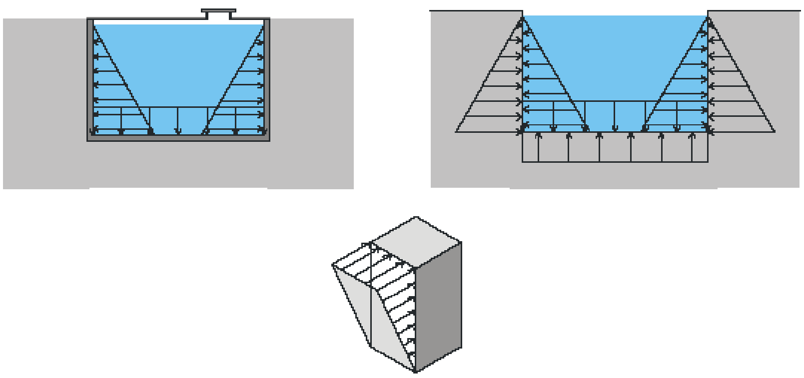


Figura 4.4 – Exemplo de uniformemente variável

Aparelhos de Apoios

A função básica dos vínculos ou apoios é de restringir o **grau de liberdade** das estruturas por meio de reações nas direções dos movimentos impedidos, ou seja, restringir as tendências de movimento de uma estrutura. Os vínculos têm a função física de ligar elementos que compõem a estrutura, além da função estática de transmitir as cargas ou forças.

Os vínculos ou apoios são classificados em função de número de movimentos impedidos. Para estruturas planas existem três tipos de vínculos:

Vínculos de Primeira Ordem (apoio simples):

São aqueles que impedem deslocamento somente em uma direção, produzindo reações equivalentes a uma força com linha de ação conhecida. Apenas uma reação será a incógnita.

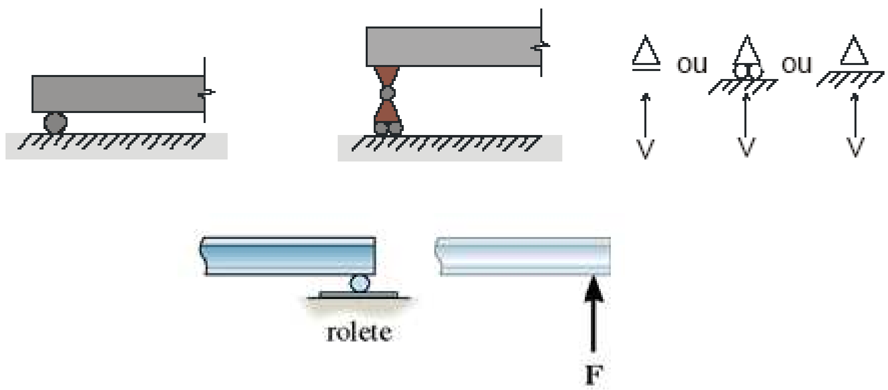


Figura 5.1 – Aparelho de Apoio do 1º Gênero (R.C.Hibbeler)

O deslocamento na direção y é impedido, logo, nesta direção, tem-se uma reação de apoio V (vertical).

Vínculos de Segunda Ordem (articulação plana):

São aqueles que restringem a translação de um corpo livre em todas as direções, mas não podem restringir a rotação em torno da conexão. Portanto, a reação produzida equivale a uma força com direção conhecida, envolvendo duas incógnitas, geralmente representadas pelas componentes x e y da reação.

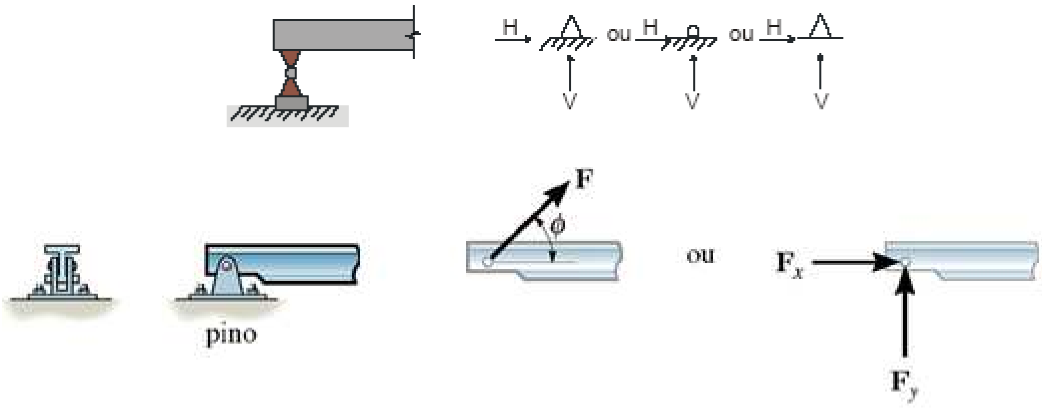


Figura 5.2 – Aparelho de Apoio do 2º Gênero (R.C.Hibbeler)

Os deslocamentos nas direções x e y são impedidos, logo, nestas direções, têm-se duas reações de apoio H (horizontal) e V (vertical).

5.1 Vínculo de Terceira Ordem (engaste ou apoio fixo):

São aqueles que impedem qualquer movimento de corpo livre, imobilizando-o completamente.

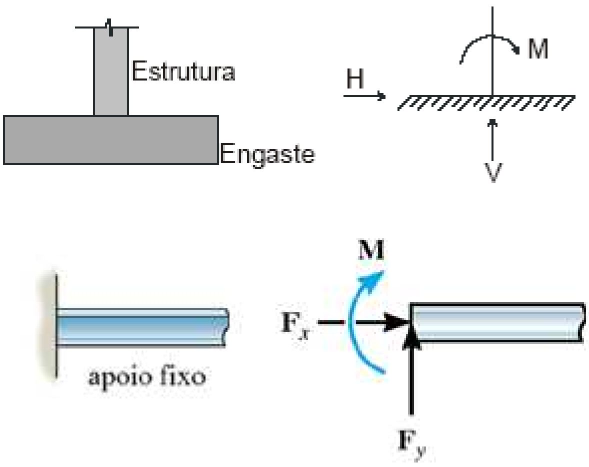


Figura 5.3 – Aparelho de Apoio do 3º Gênero (R.C.Hibbeler)

Os deslocamentos nas direções x, y e a rotação em z são impedidos, logo, nestas direções, têm-se três reações de apoio H (horizontal), V (vertical) e M (momento).

Observação: Os vínculos podem ser chamados de 1ª, 2ª e 3ª ordem ou classe ou gênero ou tipo.

Classificação da estrutura quanto à vinculação:

Isostática: Em uma estrutura isostática o número de incógnitas é igual ao número de equações, ou seja, bastam as equações fundamentais da estática para determinar as suas reações de apoio.

Hipostática: Nas estruturas hipostáticas os apoios são em menor número que o necessário para restringir todos os movimentos possíveis da estrutura. Ou

Hiperstática: Estrutura hiperestática tem número de vínculos maior que o necessário. O número de reações de apoio excede o das equações fundamentais da estática.

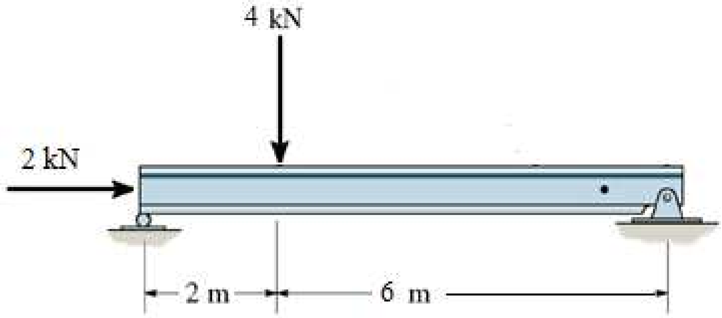
Estudo das Vigas Isostáticas

Reações de Apoio

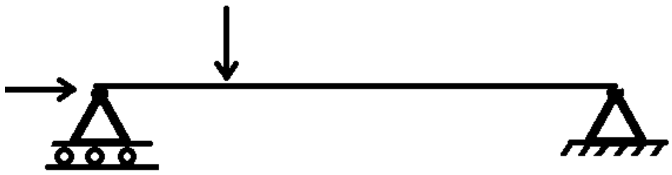
Uma estrutura para estar em equilíbrio deve atender as equações de equilíbrio estático vistas anteriormente, este equilíbrio e garantido pelos aparelhos de apoios da estrutura. De maneira que as forças que equilibrarão o sistema provem dos mesmos, ou seja, as reações de apoio. O cálculo dessas reações é entendido de maneira mais fácil através do exemplo a seguir:

- **Determinação das reações nos apoios de uma viga isostática:**

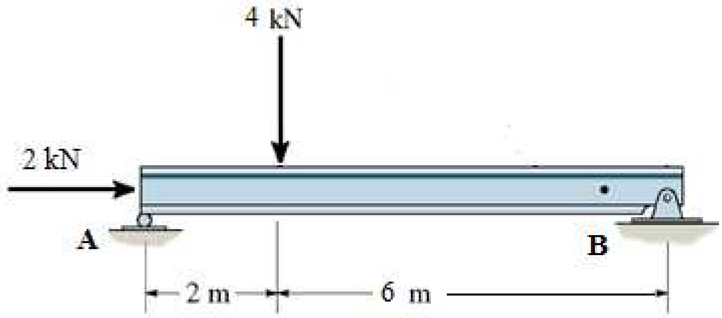
  - **1º CASO -** 1 Carga concentrada horizontal e 1 carga concentrada vertical.



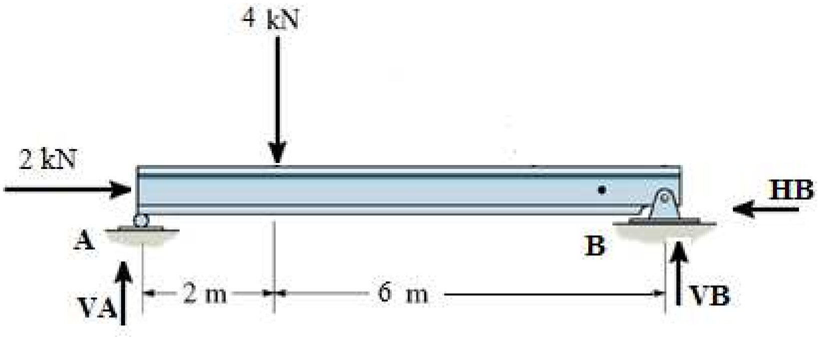
Esquema Estrutural



1º Passo – Dar nome as apoios, isso evita confundir a posição das reações que por ventura aparecerão.



2º Passo – Identificar os apoios quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações.



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A** (1º gênero);

VB = Reação vertical do **apoio B** (2º gênero);

HB = Reação horizontal do **apoio B** (2º gênero);

3º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, (→ +) (- ←).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$2 - HB = 0$$
$$HB = 2kN;$$

Desta forma, determinamos a reação horizontal no apoio B que garante que a viga não se deslocará na horizontal.

4º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$-4 + VA + VB = 0$$
$$VA + VB = 4kN;$$

5º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, com apenas duas das equações não se pode determinar os valores de VA e VB, desta forma faz-se uso da terceira equação de equilíbrio. Escolhe-se um dos apoios como ponto de referência de momento e verificamos quais forças e reações que tendem a promover rotação neste apoio. Neste exemplo escolheremos o apoio B como referência. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário,** $\overset{M}{+}$ $\overset{M}{-}$.

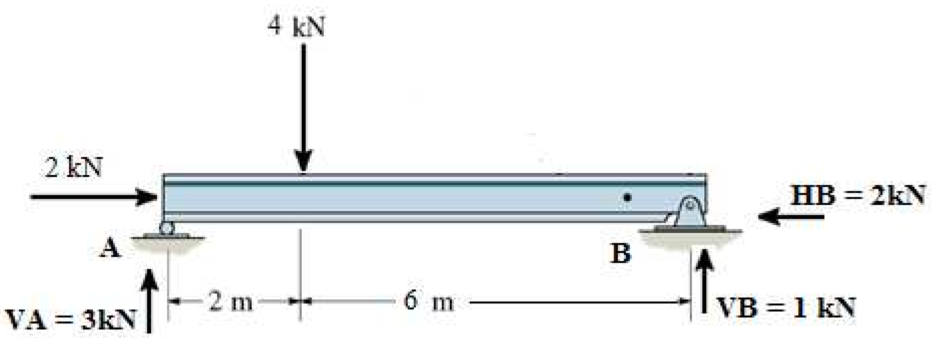
Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

6º Passo – Com o conhecimento do valor da reação VA, voltamos ao 4º Passo e determinamos o valor de VB.

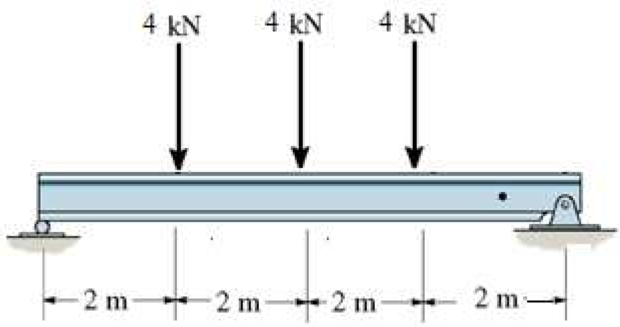
$$\Sigma M_B = 0 \quad \overset{M}{+}$$
$$VA \times 8 - 4 \times 6 = 0$$
$$8VA - 24 = 0$$
$$8VA = 24$$
$$VA = \frac{24}{8}$$
$$VA = 3kN$$

$$VA + VB = 4kN$$
$$3 + VB = 4$$
$$VB = 4 - 3$$
$$VB = 1kN$$

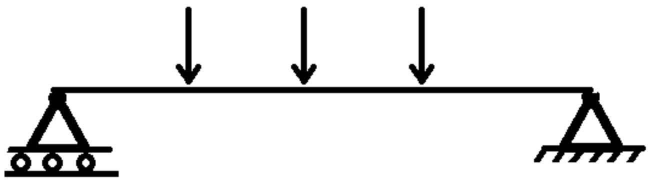
Se analisarmos a estrutura, observaremos que os resultados são compatíveis com a figura, uma vez que a força vertical, 4kN, está mais próxima do apoio A, sua reação deverá ser maior, pois está sendo mais solicitado que o apoio B. O resultado final é apresentado abaixo.



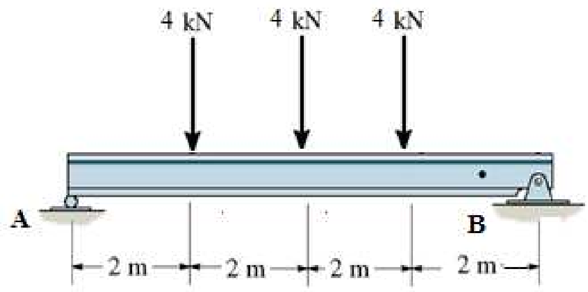
- **2º CASO -** Várias cargas concentradas na direção vertical.



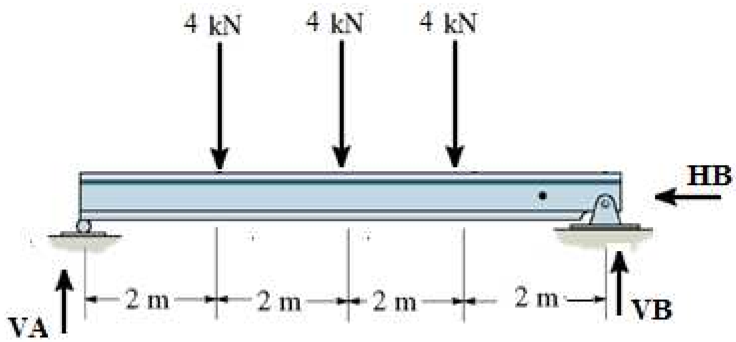
Esquema Estrutural



1º Passo – Dar nome as apoios, isso evita confundir a posição das reações que por ventura aparecerão.



2º Passo – Identificar os apoios quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações.



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A** (1º gênero);

VB = Reação vertical do **apoio B** (2º gênero);

HB = Reação horizontal do **apoio B** (2º gênero);

3º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, (→ +) (- ←).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$HB = 0$$

Como pode ser visto na figura, não existe solicitação no eixo X, desta forma, sem solicitação não haverá reação do apoio do 2º gênero na direção correspondente.

4º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$-4-4-4+VA+VB=0$$
$$VA+VB=12kN;$$

5º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, com apenas duas das equações não se pode determinar os valores de VA e VB, desta forma faz-se uso da terceira equação de equilíbrio. Escolhe-se um dos apoios como ponto de referência de momento e verificamos quais forças e reações tendem a promover rotação neste apoio. Neste exemplo escolheremos o apoio B como referência. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário,** $\overset{M}{\circlearrowright}+ \ \ -\overset{M}{\circlearrowleft}$.

Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

$$\Sigma M_B = 0$$

$$VA \times 8 - 4 \times 6 - 4 \times 4 - 4 \times 2 = 0$$

$$8VA - 24 - 16 - 8 = 0$$

$$8VA = 48$$

$$VA = \frac{48}{8}$$

$$VA = 6kN$$

6º Passo – Com o conhecimento do valor da reação VA, voltamos ao 4º Passo e determinamos o valor de VB.

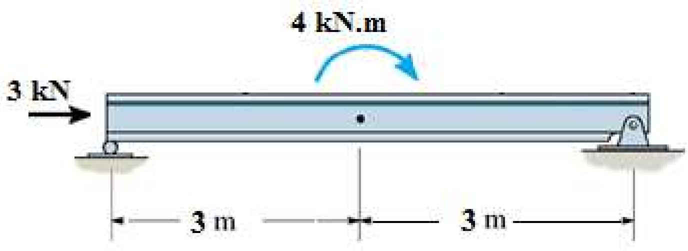
$$VA + VB = 12kN$$

$$6 + VB = 12$$

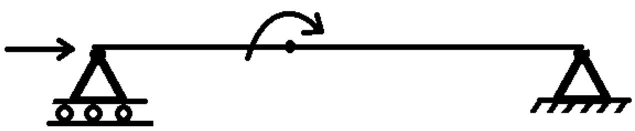
$$VB = 12 - 6$$

$$VB = 6kN$$

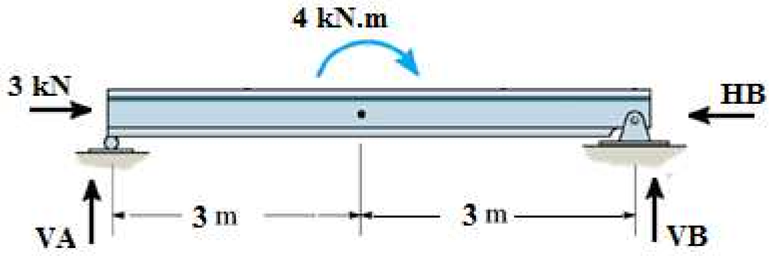
- **3º CASO -** Carga de momento aplicado com carga horizontal.



Esquema Estrutural



Solução:



$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$-HB + 3 = 0$$
$$HB = 3kN(\leftarrow)$$

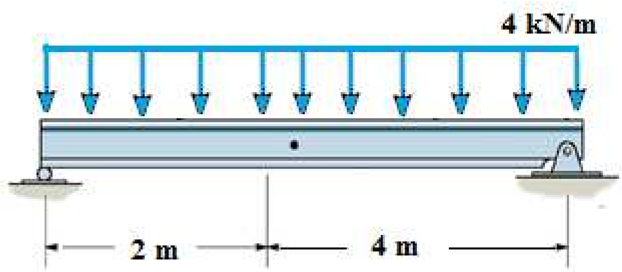
$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$VA + VB = 0$$

Calculo de VB

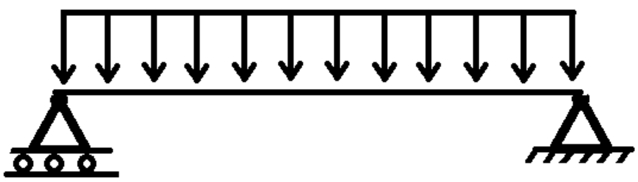
$$-0{,}67 + VB = 0$$
$$VB = 0{,}67kN(\uparrow)$$

$$\Sigma M_B = 0$$
$$VA \times 6 + 4 = 0$$
$$6VA = -4$$
$$VA = \frac{4}{6}$$
$$VA = -0{,}67kN$$
$$VA = 0{,}67kN(\downarrow)$$

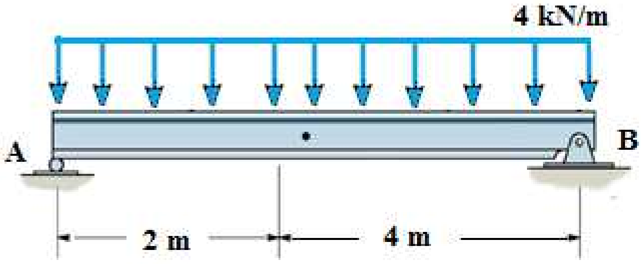
- **4º CASO -** Carga uniformemente distribuída.



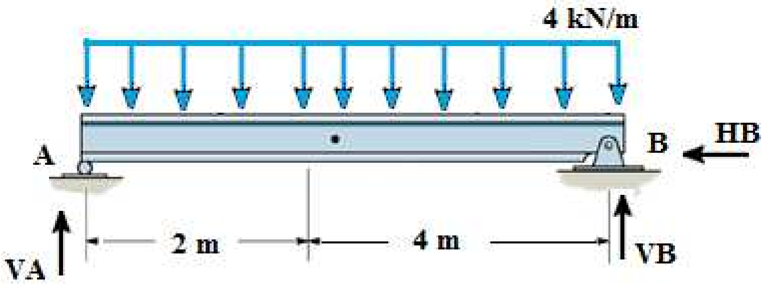
Esquema Estrutural



1º Passo – Dar nome as apoios, isso evita confundir a posição das reações que por ventura aparecerão.



2º Passo – Identificar os apoios quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações.



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A** (1º gênero);
VB = Reação vertical do **apoio B** (2º gênero);
HB = Reação horizontal do **apoio B** (2º gênero);

3º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

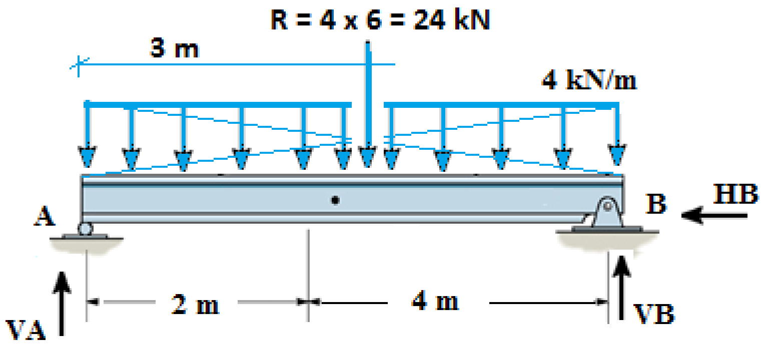
Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, (→ +) (- ←).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$HB = 0$$

Como pode ser visto na figura, não existe solicitação no eixo X, desta frma, sem solicitação não haverá reação do apoio do 2º gênero na direção correspondente.

4º Passo – Cálculo da carga resultante do carregamento distribuído.

Neste momento, reduz a carga distribuída a uma carga concentrada equivalente, chamada carga resultante e é determinada pelo cálculo da área do carregamento e será aplicada no centro de gravidade da figura formada pelo carregamento. Como segue:

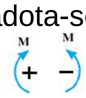


5º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Faz-se a soma algébrica da a carga resultante e das reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$-24 + VA + VB = 0$$
$$VA + VB = 24kN;$$

6º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, com apenas duas das equações não se pode determinar os valores de VA e VB, desta forma faz-se uso da terceira equação de equilíbrio. Escolhe-se um dos apoios como ponto de referência de momento e verificamos quais forças e reações tendem a promover rotação neste apoio. Neste exemplo escolheremos o apoio B como referência. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário,**  .

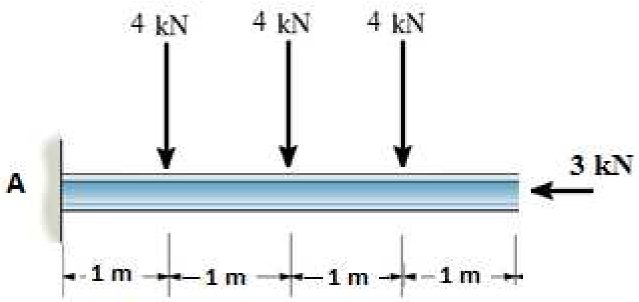
Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \overset{M}{\circlearrowleft}+$$
$$VA \times 6 - 24 \times 3 = 0$$
$$6VA - 72 = 0$$
$$6VA = 72$$
$$VA = \frac{72}{6}$$
$$VA = 12kN$$

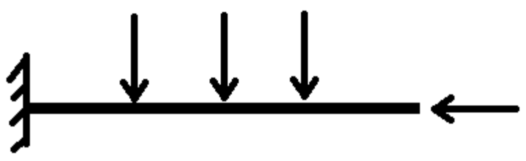
7º Passo – Com o conhecimento do valor da reação VA, voltamos ao 4º Passo e determinamos o valor de VB.

$$VA + VB = 24kN$$
$$12 + VB = 24$$
$$VB = 24 - 12$$
$$VB = 12kN$$

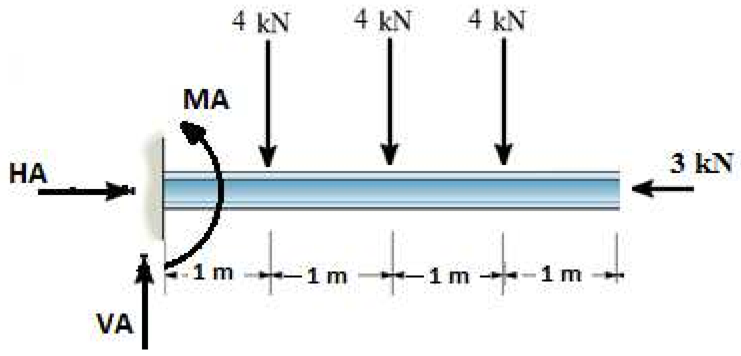
- **5º CASO –** Apoio do Terceiro Gênero - Cargas Concentrada e Carga horizontal.



Esquema Estrutural



1º Passo – Identificar o apoio quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações. Como só temos um apoio do terceiro gênero, ou seja, um engaste. Desta maneira, representamos suas três reações no mesmo ponto, como abaixo:



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A**;

HA = Reação horizontal do **apoio A**;

MA = Reação de momento do **apoio A**;

2º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, (→ +) (- ←).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$HA - 3 = 0$$
$$HA = 3kN$$

3º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$-4 - 4 - 4 + VA = 0$$
$$VA = 12kN;$$

5º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, neste apoio temos a presença de uma reação de momento que entrará no somatório dos momentos, pois é a reação de equilíbrio que estamos procurando. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário,** .

Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

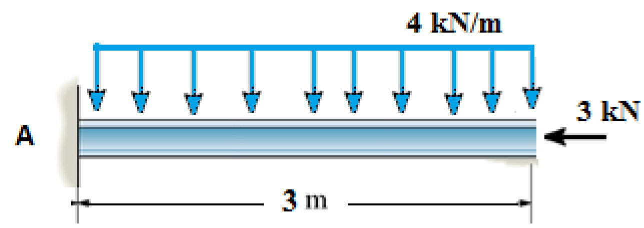
$$\Sigma M_A = 0$$

$$-MA + 4\times 6 + 4\times 4 + 4\times 2 = 0$$

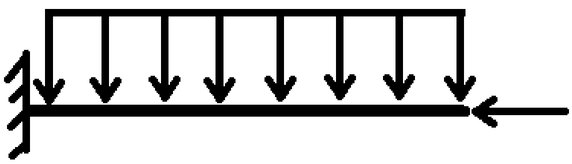
$$MA = +24 + 16 + 8$$

$$MA = 48 kN.m$$

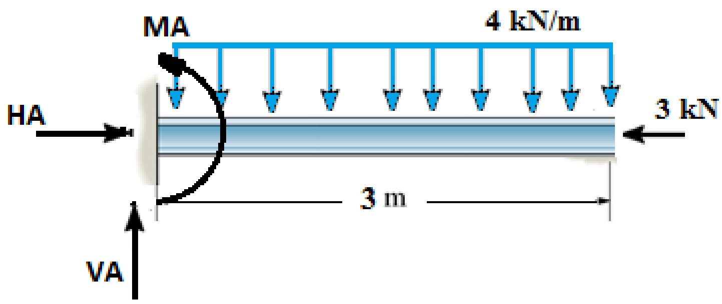
- **6º CASO –** Apoio do Terceiro Gênero - Carga Uniformemente Distribuída e Carga Horizontal.



Esquema Estrutural



1º Passo – Identificar o apoio quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações. Como só temos um apoio do terceiro gênero, ou seja, um engaste. Desta maneira, representamos suas três reações no mesmo ponto, como abaixo:



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A**;

HA = Reação horizontal do **apoio A**;

MA = Reação de momento do **apoio A**;

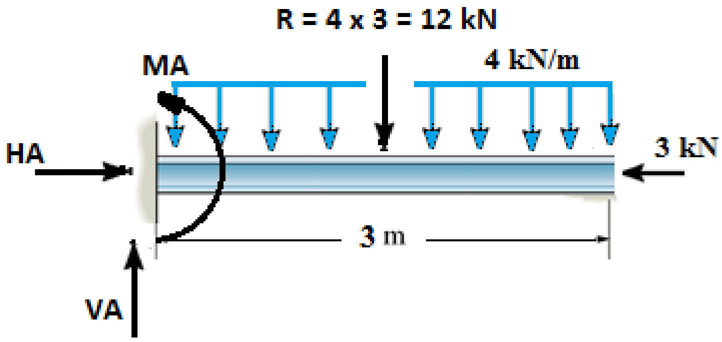
2º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, (→ +) (- ←).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$HA - 3 = 0$$
$$HA = 3kN$$

3º Passo – Cálculo da carga resultante do carregamento distribuído.

Neste momento, reduz-se a carga distribuída a uma carga concentrada equivalente, chamada carga resultante e é determinada pelo cálculo da área do carregamento e será aplicada no centro de gravidade da figura formada pelo carregamento. Como segue:



4º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Faz-se a soma algébrica da a carga resultante e das reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$-12 + VA = 0$$
$$VA = 12kN;$$

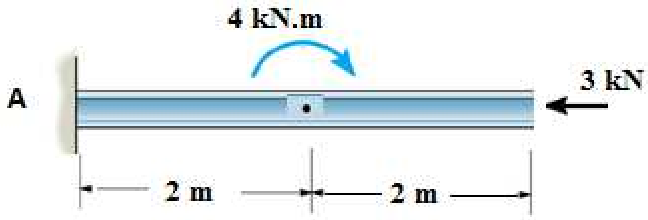
5º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, neste apoio temos a presença de uma reação de momento que entrará no somatório dos momentos, pois é a reação de equilíbrio que estamos procurando. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário,** M + M − .

Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

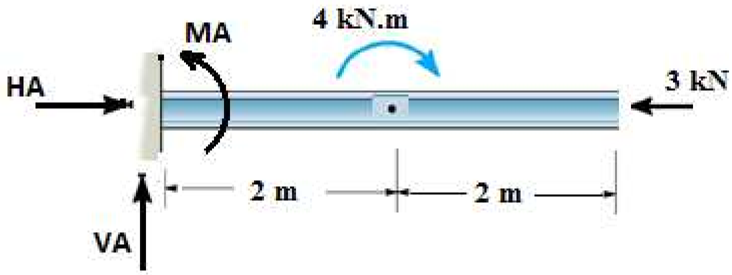
$$\Sigma M_A = 0 \quad \overset{M}{+}$$
$$-MA + 12 \times 1{,}5 = 0$$
$$MA = 18$$
$$MA = 18kN.m$$

- **7º CASO –** Apoio do Terceiro Gênero - Carga de Momento Aplicado E Carga Horizontal.



Esquema Estrutural

1º Passo – Identificar o apoio quanto aos seus graus de liberdade, atribuindo suas respectivas reações. Como só temos um apoio do terceiro gênero, ou seja, um engaste. Desta maneira, representamos suas três reações no mesmo ponto, como abaixo:



Onde,

VA = Reação vertical do **apoio A**;

HA = Reação horizontal do **apoio A**;

MA = Reação de momento do **apoio A**;

2º Passo – Utilização da primeira equação de equilíbrio, somatório das forças na horizontal (eixo X).

Neste momento, faremos a soma algébrica de todas as forças e reações que aparecem na horizontal, eixo X, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de X, (→ +) (- ←).

$$\Sigma F_x = 0 \quad (\rightarrow +)$$
$$HA - 3 = 0$$
$$HA = 3kN$$

3º Passo – Utilização da segunda equação de equilíbrio, somatório das forças na vertical (eixo Y).

Faz-se a soma algébrica da a carga resultante e das reações que aparecem na vertical, eixo Y, adotando como positivas todas as forças e/ou reações que apontem na direção positiva de Y, (+ ↑) (- ↓).

$$\Sigma F_Y = 0 \quad (\uparrow +)$$
$$VA = 0$$

4º Passo – Utilização da terceira equação de equilíbrio, somatório dos momentos (eixo Z).

Como pode ser observado, neste apoio temos a presença de uma reação de momento que entrará no somatório dos momentos, pois é a reação de equilíbrio que estamos procurando. Para o momento adota-se como **positivo a rotação no sentido horário e negativo no caso contrário,** M + M − .

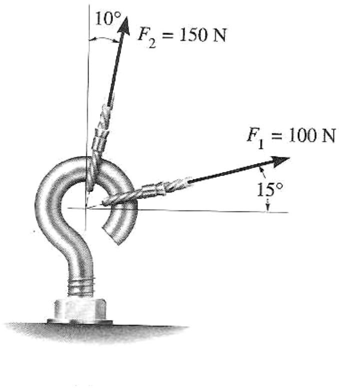
Lembrando que momento é igual a força x distância, prosseguimos da seguinte forma:

$$\Sigma M_A = 0 \quad \text{M} \; +$$
$$-MA + 4 = 0$$
$$MA = 4kN.m$$

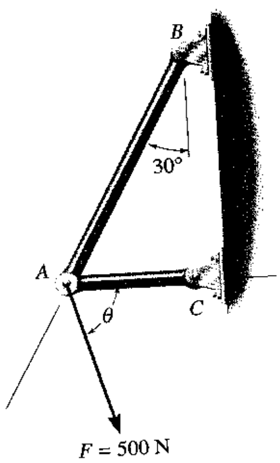
Como apresentado, para toda determinação das reações de apoio, sempre serão utilizadas as equações de equilíbrio estático. O procedimento adotado segue esse padrão, o entendimento desta etapa da análise estrutural é de fundamental importância para o desenvolvimento dos diagramas de esforços internos, assunto que será abordado com maior detalhe no futuro.

Lista de Exercícios

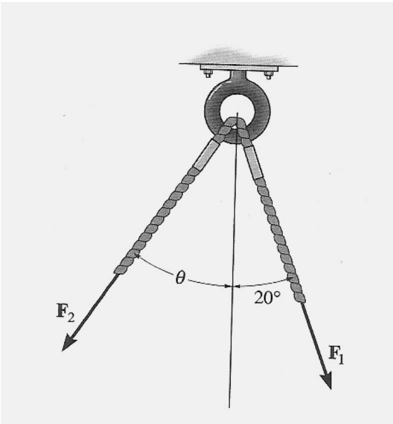
1. O parafuso tipo gancho da figura abaixo está sujeito a duas forças $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$. Determine a intensidade (módulo) e a direção da força resultante $\mathbf{F_R}$.



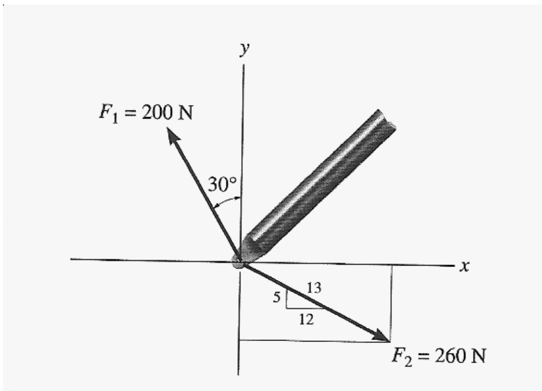
2. A força **F** que atua sobre a estrutura abaixo, tem intensidade de 500 N e deve ser decomposta em dois componentes que atuam ao longo dos elementos AB e AC. Determine o ângulo θ, medido abaixo da horizontal, de modo que o componente $\mathbf{F_{AC}}$ seja orientado de A para C e tenha grandeza de 400 N.



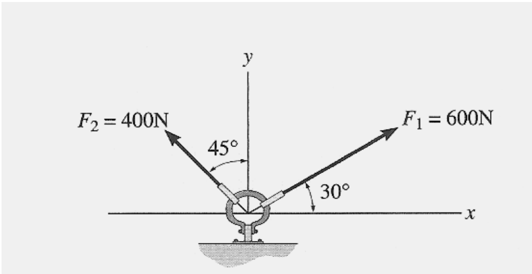
3. O anel mostrado abaixo está submetido a duas forças $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$. Se for necessário que a força resultante tenha intensidade 1 kN e seja orientada verticalmente para baixo, determine:
   a) A intensidade de $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, desde que $\theta = 30°$;
   b) A intensidade de $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, se $\mathbf{F_2}$ for mínima.



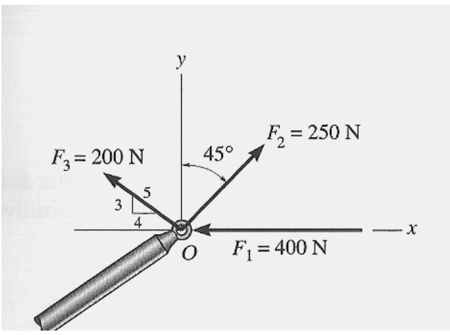
4. Determine os componentes de x e y de $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ que atuam sobre a lança mostrada na figura abaixo. Expresse cada força como vetor cartesiano.



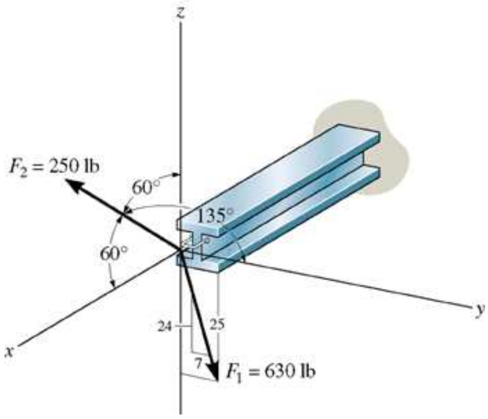
5. O elo da figira abaixo, está submetido a duas forças **F_1** e **F_2**. Determine a intensidade e a orientação da força resultante.



6. A extremidade de uma lança O na figura abaixo, está submetida a três forças concorrentes e coplanares. Determine a intensidade e a rientação da força resultante.



7. A viga está sujeita às duas forças mostradas. Expresse cada força na forma vetorial cartesiana e determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante.



$$\mathbf{F}_1 = 630\left(\frac{7}{25}\right)\mathbf{j} - 630\left(\frac{24}{25}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_1 = (176.4\mathbf{j} - 604.8\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_1 = \{176\mathbf{j} - 605\mathbf{k}\}\ \text{lb} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\mathbf{F}_2 = 250\cos 60°\mathbf{i} + 250\cos 135°\mathbf{j} + 250\cos 60°\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_2 = (125\mathbf{i} - 176.777\mathbf{j} + 125\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F}_2 = \{125\mathbf{i} - 177\mathbf{j} + 125\mathbf{k}\}\ \text{lb} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_R = 125\mathbf{i} - 0.3767\mathbf{j} - 479.8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_R = \{125\mathbf{i} - 0.377\mathbf{j} - 480\mathbf{k}\}\ \text{lb} \qquad \textbf{Ans}$$

$$F_R = \sqrt{(125)^2 + (-0.3767)^2 + (-479.8)^2} = 495.82$$

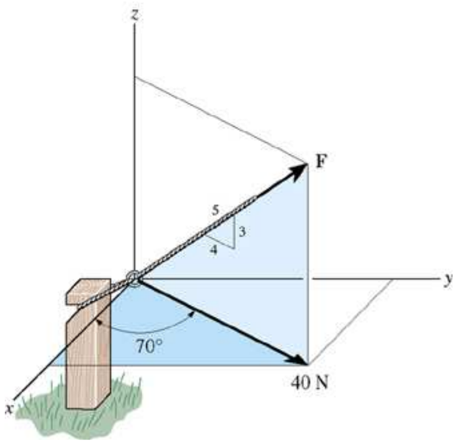
$$= 496\ \text{lb} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{125}{495.82}\right) = 75.4° \qquad \textbf{Ans}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-0.3767}{495.82}\right) = 90.0° \qquad \textbf{Ans}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-479.8}{495.82}\right) = 165° \qquad \textbf{Ans}$$

8. Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força F que atua sobre a estaca.



$$\frac{4}{5}F = 40, \qquad F = 50\ \text{N}$$

$$\mathbf{F} = \left(40\cos 70°\mathbf{i} + 40\sin 70°\mathbf{j} + \frac{3}{5}(50)\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{F} = \{13.7\mathbf{i} + 37.6\mathbf{j} + 30.0\mathbf{k}\}\ \text{N} \qquad \textbf{Ans}$$

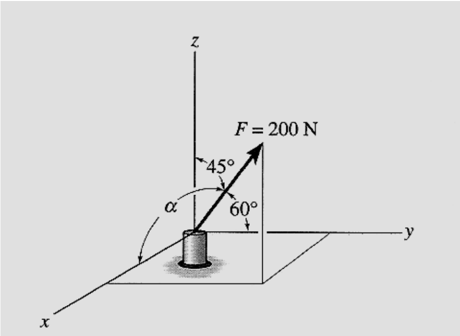
$$F = \sqrt{(13.68)^2 + (37.59)^2 + (30)^2} = 50\ \text{N} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{13.68}{50}\right) = 74.1° \qquad \textbf{Ans}$$

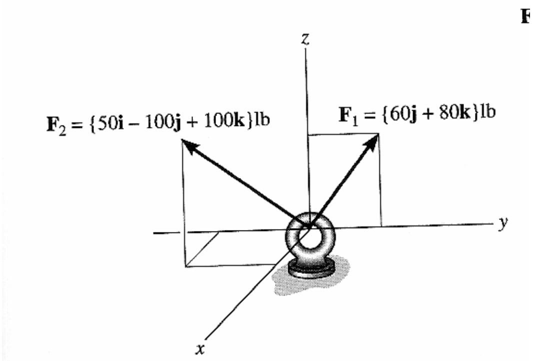
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{37.59}{50}\right) = 41.3° \qquad \textbf{Ans}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{30}{50}\right) = 53.1° \qquad \textbf{Ans}$$

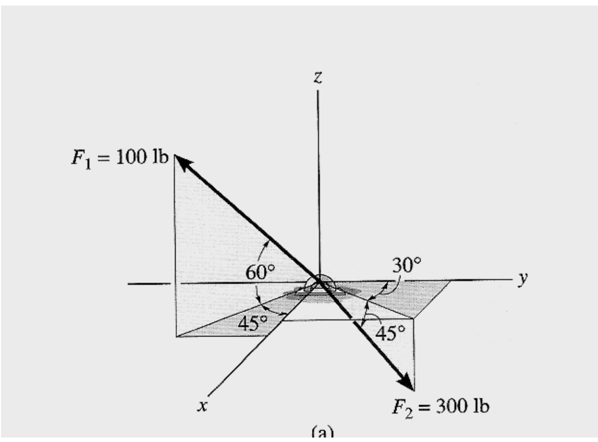
9. Expresse a força F, mostrada na figura abaixo, como um vetor cartesiano.



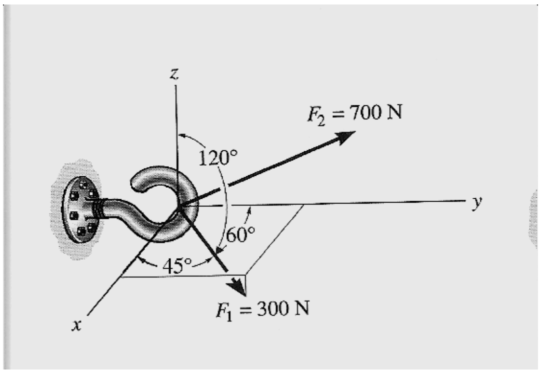
10. Determine a intensidade e os ângulos diretores coordenados da força resultante que atua sobre o anel, figura abaixo.



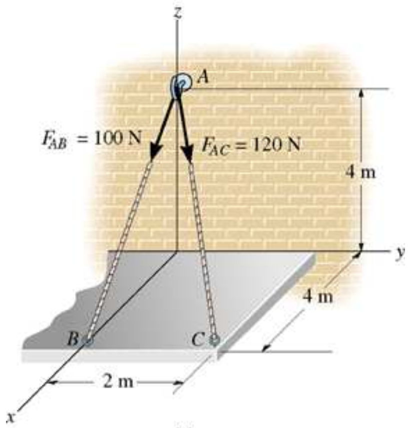
11. Expresse a força $\mathbf{F_1}$, mostrada na figura abaixo, como vetor cartesiano.



12. Duas forças atuam sobre o gancho, figura abaixo. Especifique os ângulos diretores coordenados de $\mathbf{F_2}$, de modo que a força resultante $\mathbf{F_R}$ atue ao longo do eixo positivo y e tenha intensidade de 800 N.



13. A cobertura é suportada por cabos. Se os cabos exercerem as forças FAB = 100 N e FAC = 120 N no gancho em A, determine a intensidade da força resultante que atua em A.



(a)

14. Em um dado instante, a posição de um avião em A e a de um trem em B são medidas em relação à antena de radar em O. Deternime a distância d entre A e B nesse instante.

Position Vector : The coordinates of points *A* and *B* are

$$A(-5\cos 60°\cos 35°,\ -5\cos 60°\sin 35°,\ 5\sin 60°)\ \text{km}$$
$$= A(-2.048,\ -1.434,\ 4.330)\ \text{km}$$

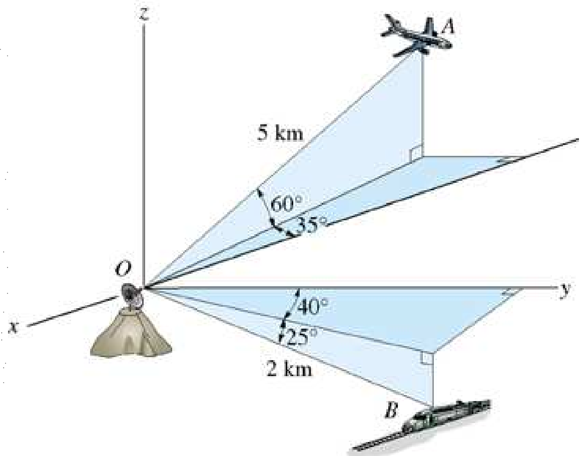
$$B(2\cos 25°\sin 40°,\ 2\cos 25°\cos 40°,\ -2\sin 25°)\ \text{km}$$
$$= B(1.165,\ 1.389,\ -0.845)\ \text{km}$$

The position vector $\mathbf{r}_{AB}$ can be established from the coordinates of points *A* and *B*.

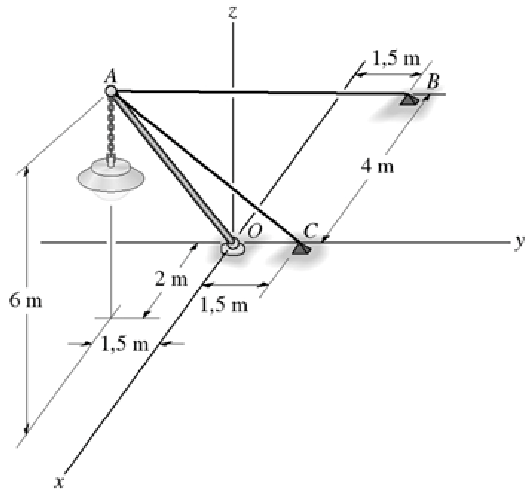
$$\mathbf{r}_{AB} = \{[1.165-(-2.048)]\mathbf{i}+[1.389-(-1.434)]\mathbf{j}+(-0.845-4.330)\mathbf{k}\}\ \text{km}$$
$$= \{3.213\mathbf{i}+2.822\mathbf{j}-5.175\mathbf{k}\}\ \text{km}$$

The distance between points *A* and *B* is

$$d = r_{AB} = \sqrt{3.213^2+2.822^2+(-5.175)^2} = 6.71\ \text{km} \qquad \textbf{Ans}$$



15. Os cabos AB e AC suportam tração máxima de 500 N e o poste, compressão máxima de 300 N. Determine o peso máximo da luminária sustentada na posição mostrada na figura. A força no poste atua ao longo do eixo dele.



$$\mathbf{F}_{AO} = F_{AO}\{\frac{2}{6.5}\mathbf{i} - \frac{1.5}{6.5}\mathbf{j} + \frac{6}{6.5}\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB}\{-\frac{6}{9}\mathbf{i} + \frac{3}{9}\mathbf{j} - \frac{6}{9}\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = F_{AC}\{-\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{W} = \{-W\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad \frac{2}{6.5}F_{AO} - \frac{6}{9}F_{AB} - \frac{2}{7}F_{AC} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -\frac{1.5}{6.5}F_{AO} + \frac{3}{9}F_{AB} + \frac{3}{7}F_{AC} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad \frac{6}{6.5}F_{AO} - \frac{6}{9}F_{AB} - \frac{6}{7}F_{AC} - W = 0$$

1) Assume $F_{AB} = 500$ N

$$\frac{2}{6.5}F_{AO} - \frac{6}{9}(500) - \frac{2}{7}F_{AC} = 0$$

$$-\frac{1.5}{6.5}F_{AO} + \frac{3}{9}(500) + \frac{3}{7}F_{AC} = 0$$

$$\frac{6}{6.5}F_{AO} - \frac{6}{9}(500) - \frac{6}{7}F_{AC} - W = 0$$

Solving.

$F_{AO} = 1444.462$ N $>$ 300 N (N.G!)

$F_{AC} = 388.902$ N

$W = 666.677$ N

2) Assume $F_{AC} = 500$ N

$$\frac{2}{6.5}F_{AO} - \frac{6}{9}F_{AB} - \frac{2}{7}(500) = 0$$

$$-\frac{1.5}{6.5}F_{AO} + \frac{3}{9}F_{AB} + \frac{3}{7}(500) = 0$$

$$\frac{6}{6.5}F_{AO} - \frac{6}{9}F_{AB} - \frac{6}{7}(500) - W = 0$$

Solving.

$F_{AO} = 1857.143$ N $>$ 300 N (N.G!)

$F_{AB} = 642.857$ N $>$ 500 N (N.G!)

3) Assume $F_{AO} = 300$ N

$$\frac{2}{6.5}(300) - \frac{6}{9}F_{AB} - \frac{2}{7}F_{AC} = 0$$

$$-\frac{1.5}{6.5}(300) + \frac{3}{9}F_{AB} + \frac{3}{7}F_{AC} = 0$$

$$\frac{6}{6.5}(300) - \frac{6}{9}F_{AB} - \frac{6}{7}F_{AC} - W = 0$$

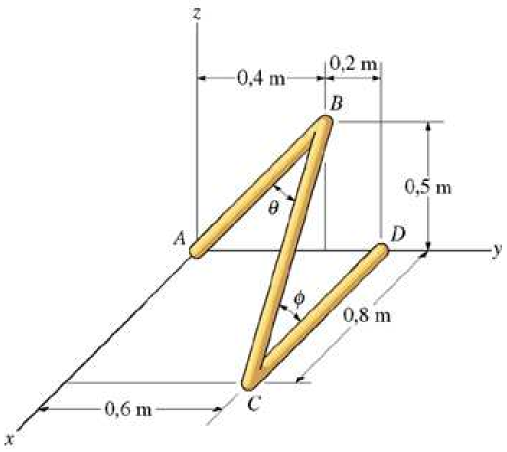
Solving.

$F_{AC} = 80.8$ N

$F_{AB} = 104$ N

$W = 138$ N **Ans**

16. Determine os ângulos Ø e Ɵ entre os segmentos do arame.



$\mathbf{r}_{BA} = \{-0.4\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}\}$ m ; $\qquad r_{BA} = 0.640$ m

$\mathbf{r}_{BC} = \{0.8\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}\}$ m; $\qquad r_{BC} = 0.964$ m

$\mathbf{r}_{BA}\cdot\mathbf{r}_{BC} = 0 + (-0.4)(0.2) + (-0.5)(-0.5) = 0.170\ \text{m}^2$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0.170}{(0.640)(0.964)}\right) = 74.0^\circ \qquad \textbf{Ans}$$

$\mathbf{r}_{CB} = \{-0.8\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k}\}$ m ; $\qquad r_{CB} = 0.964$ m

$\mathbf{r}_{CD} = \{-0.8\mathbf{i}\}$ m; $\qquad r_{CD} = 0.800$ m

$\mathbf{r}_{CB}\cdot\mathbf{r}_{CD} = (-0.8)(-0.8) = 0.640\ \text{m}^2$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{0.640}{(0.964)(0.800)}\right) = 33.9^\circ \qquad \textbf{Ans}$$

O cabo do reboque aplica uma força P = 4 kN na extremidade do guindaste de 20 m de comprimento. Sendo x = 25 m, determine a posição θ do guindaste, de modo que a força crie um momento máximo em relação ao ponto O. E determine o valor do momento.

Maximum moment, $OB \perp BA$

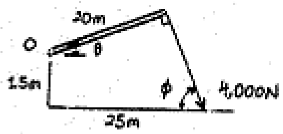
$$\circlearrowleft +(M_O)_{max} = 4000(20) = 80\,000\ \text{N}\cdot\text{m} = 80.0\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans}$$

$$4000\sin\phi(25) - 4000\cos\phi(1.5) = 80\,000$$

$$25\sin\phi - 1.5\cos\phi = 20$$

$$\phi = 56.43^\circ$$

$$\theta = 90^\circ - 56.43^\circ = 33.6^\circ \qquad \textbf{Ans}$$



Also,

$$(1.5)^2 + z^2 = y^2$$

$$2.25 + z^2 = y^2$$

Similar triangles

$$\frac{20+y}{z} = \frac{25+z}{y}$$

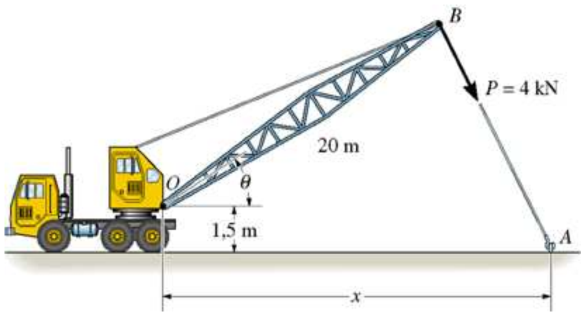
$$20y + y^2 = 25z + z^2$$

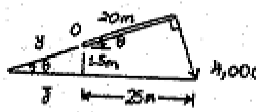
$$20(\sqrt{2.25+z^2}) + 2.25 + z^2 = 25z + z^2$$

$$z = 2.259\ \text{m}$$

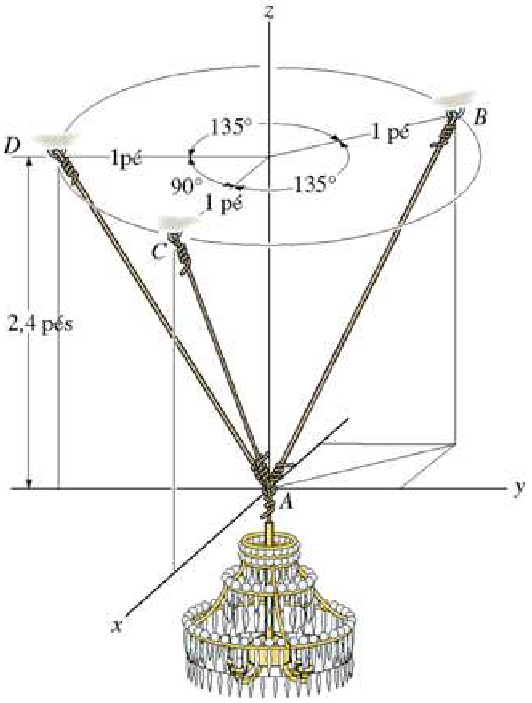
$$y = 2.712\ \text{m}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2.259}{2.712}\right) = 33.6^\circ \qquad \textbf{Ans}$$





17. Se cada arame pode sustentar a força máxima de 120 lb, determine o maior peso da candelabro que os cabos suportam na posição mostrada na figura.



$$\Sigma F_x = 0; \quad \frac{1}{2.6}F_{AC} - \frac{1}{2.6}F_{AB}\cos 45° = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad -\frac{1}{2.6}F_{AD} + \frac{1}{2.6}F_{AB}\sin 45° = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0; \quad \frac{2.4}{2.6}F_{AC} + \frac{2.4}{2.6}F_{AD} + \frac{2.4}{2.6}F_{AB} - W = 0 \qquad (3)$$

Assume $F_{AC} = 120$ lb. From Eq. (1)

$$\frac{1}{2.6}(120) - \frac{1}{2.6}F_{AB}\cos 45° = 0$$

$$F_{AB} = 169.71 > 120 \text{ lb (N.G!)}$$

Assume $F_{AB} = 120$ lb. From Eqs. (1) and (2)

$$\frac{1}{2.6}F_{AC} - \frac{1}{2.6}(120)(\cos 45°) = 0$$

$$F_{AC} = 84.853 \text{ lb} < 120 \text{ lb (O.K!)}$$

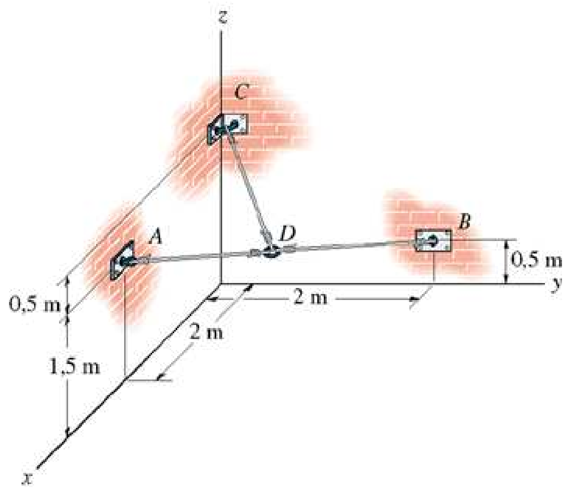
$$-\frac{1}{2.6}F_{AD} + \frac{1}{2.6}(120)\sin 45° = 0$$

$$F_{AD} = 84.853 \text{ lb} < 120 \text{ lb (O.K!)}$$

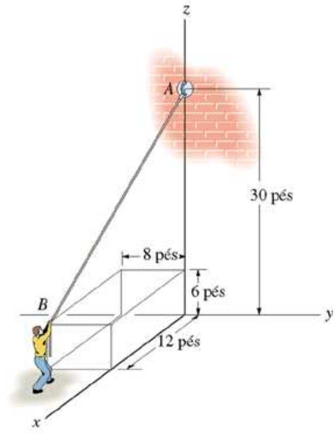
Thus,

$$W = \frac{2.4}{2.6}(F_{AC} + F_{AD} + F_{AB}) = 267.42 = 267 \text{ lb} \qquad \textbf{Ans}$$

18. Determine os comprimentos dos arames AD, BD e CD. O Anel em D está no centro entre A e B.

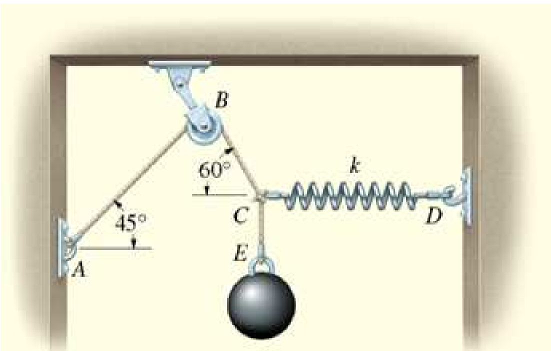


19. O homem mostrado na Figura abaixo puxa a corda com uma força de 70 lb. Represente essa força, que atua sobre o suporte A, como vetor cartesiano e determine sua direção.



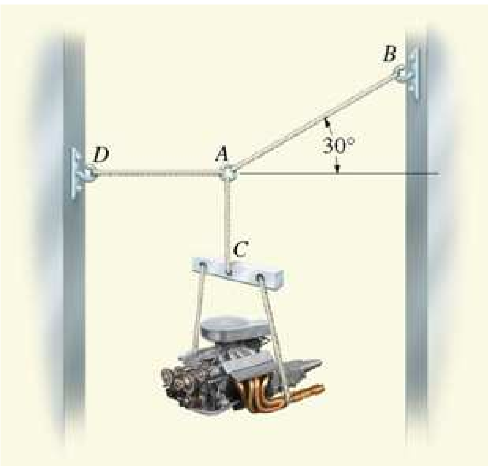
(a)

20. A esfera da figura abaixo tem massa de 6 kg e está apoiada como mostra. Desenhe a diagrama de corpo livre da esfera, da corda CE e do nó em C.



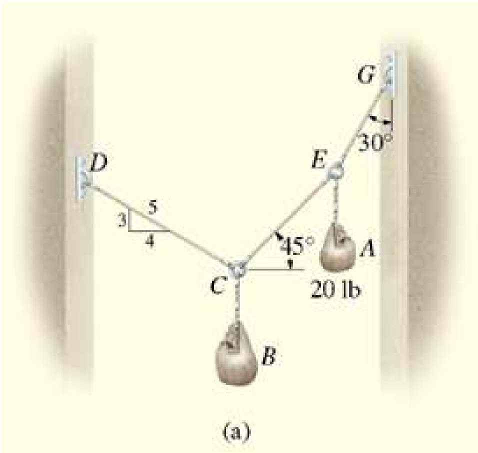
(a)

21. Determine a tensão nos cabos AB e AD para que o equilíbrio do motor de 250 kg mostrado abaixo.

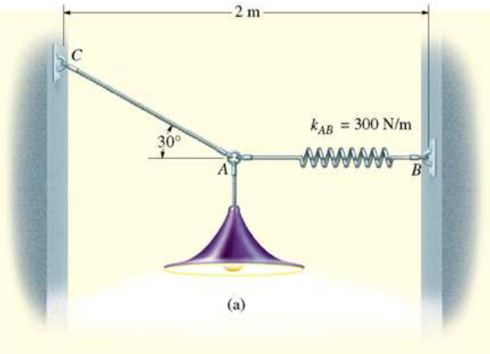


(a)

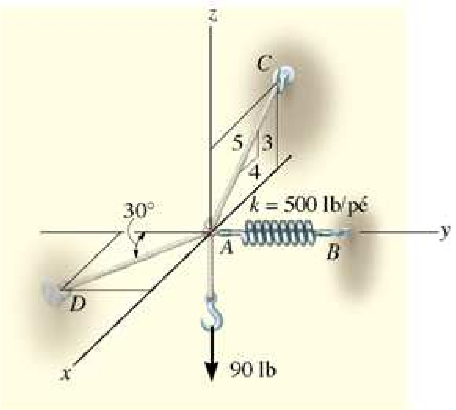
22. Se o saco da figura abaixo tiver peso de 20 lb em A, determine o peso dele em B e a força necessária em cada corda para manter o sistema na posição de equilíbrio mostrada.



23. Determine o comprimento da corda AC da figura abaixo, de modo que a luminária de 8 kg seja suspensa na posição mostrada. O comprimento não deformado da mola AB é l_{AB} = 0,40 m e a mola tem rigidez k_{AB} = 300 N/m.

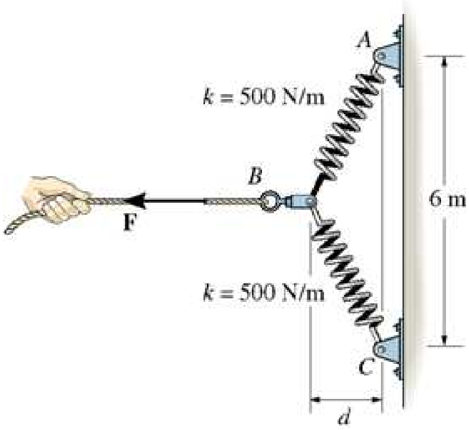


24. Uma carga de 90 lb está suspensa pelo gancho mostrado na figura abaixo. A carga é suportada por dois cabos e por uma mola com rigidez k = 500 lb/pé. Determine a força nos cabos e a deformação da mola para a condição de equilíbrio. O cabo AD está localizado no plano x-y e o cabo AC no plano x-z.



(a)

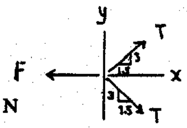
25. A mola ABC da figura tem rigidez de 500 N/m e comprimento sem deformação de 6 m. Determine a força horizontal F splicada à corda que está presa no pequeno anel B, de modo que o deslocamento do anel em relação aos apoios seja de d = 1,5 m.



$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad \frac{1.5}{\sqrt{11.25}}(T)(2) - F = 0$

$T = ks = 500(\sqrt{3^2 + (1.5)^2} - 3) = 177.05 \text{ N}$

$F = 158 \text{ N}$ **Ans**



26. A mola tem rigidez k = 800 N/m e comprimento de 200 mm sem deformação. Determine a força nos cabos BC e BD quando a mola é mantida na posição mostrada na figura.

The Force in The Spring : The spring stretches $s = l - l_0 = 0.5 - 0.2 = 0.3$ m. Applying Eq.3 – 2, we have

$$F_{sp} = ks = 800(0.3) = 240 \text{ N}$$

Equations of Equilibrium :

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad F_{BC}\cos 45° + F_{BD}\left(\frac{4}{5}\right) - 240 = 0$

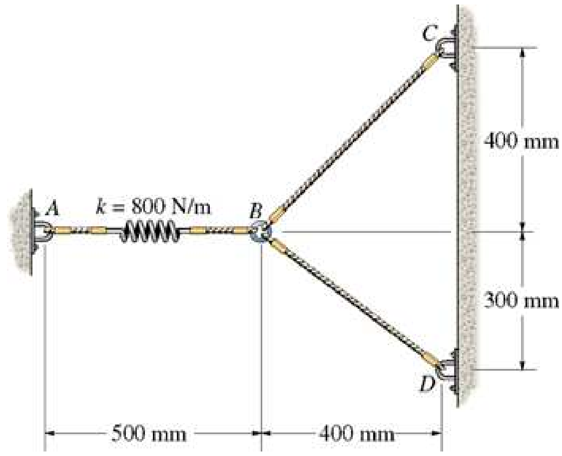
$$0.7071F_{BC} + 0.8F_{BD} = 240 \qquad [1]$$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BC}\sin 45° - F_{BD}\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

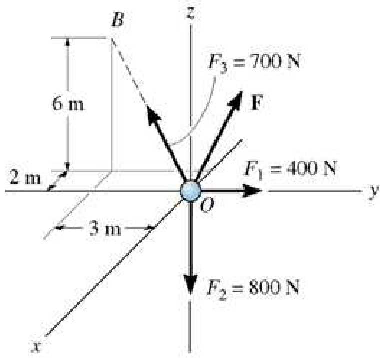
$$F_{BC} = 0.8485F_{BD} \qquad [2]$$

Solving Eqs. [1] and [2] yields,

$F_{BD} = 171 \text{ N}$. $F_{BC} = 145 \text{ N}$ **Ans**

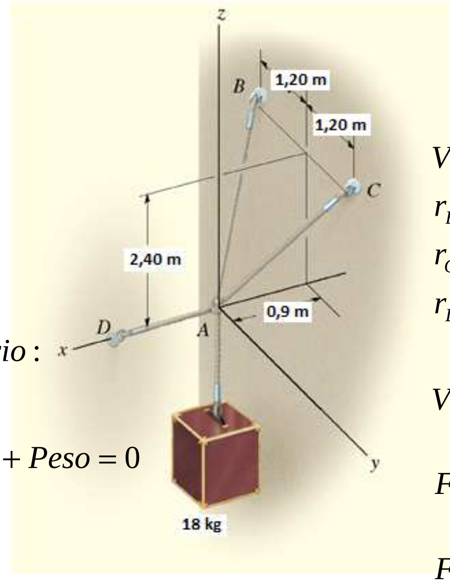


27. Determine a intensidade e os ângulos dos sentidos das coordenadas da força F da figura abaixo necessários para o equilíbrio do ponto material O.



(a)

28. Determine a força desenvolvida em cada cabo usado para suportar a caixa de 180 kgf na figura abaixo.



Vetores Posição:

$$r_B = \{-0{,}9i - 1{,}2j + 2{,}4k\}$$
$$r_C = \{-0{,}9i + 1{,}2j + 2{,}4k\}$$
$$r_D = \{1i\}$$

Vetores Cartesianos:

$$F_B = F_B \cdot \left(\frac{r_B}{|r_B|}\right) = F_B \cdot \left\{\frac{-0{,}9i - 1{,}2j + 2{,}4k}{\sqrt{(-0{,}9)^2 + (-1{,}2)^2 + (2{,}4)^2}}\right\}$$
$$F_B = \{-0{,}318 \cdot F_B i - 0{,}424 \cdot F_B j + 0{,}848 \cdot F_B k\}$$

$$F_C = F_C \cdot \left(\frac{r_C}{|r_C|}\right) = F_C \cdot \left\{\frac{-0{,}9i + 1{,}2j + 2{,}4k}{\sqrt{(-0{,}9)^2 + (+1{,}2)^2 + (2{,}4)^2}}\right\}$$
$$F_C = \{-0{,}318 \cdot F_C i + 0{,}424 \cdot F_C j + 0{,}848 \cdot F_C k\}$$

$$F_D = F_D i$$

$$Peso = 180kgf$$

Condição de *Equilíbrio*:

$$\sum F = 0$$
$$\sum F = F_B + F_C + F_D + Peso = 0$$

$$\sum F_x = 0$$
$$\{-0{,}318 \cdot F_B - 0{,}318 \cdot F_C + F_D\}i = 0$$

$$\sum F_y = 0$$
$$\{-0{,}424 \cdot F_B + 0{,}424 \cdot F_C\}j = 0$$

$$\sum F_z = 0$$
$$\{+0{,}848 \cdot F_B + 0{,}848 \cdot F_C - 180\}k = 0$$

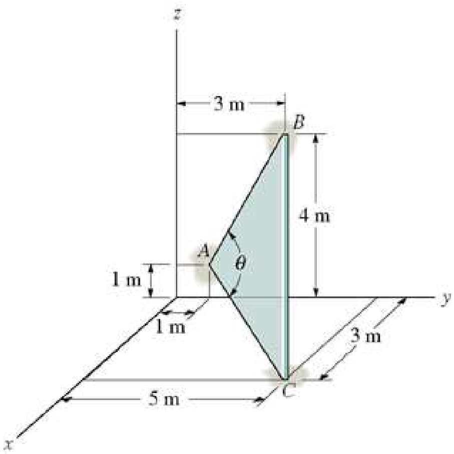
Re*solvendo o sistema*:

$$F_B = F_C = 106{,}13kgf;$$
$$F_D = 67{,}50kgf$$

Caso interesse saber os ângulos:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}; \cos\beta = \frac{A_y}{A}; \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

29. Determine o comprimento do lado BC da chapa triangular. Resolva o problema calculando a intensidade de rBC. Em seguida, verifique o resultado calculando primeiro θ, rAB e rAC e depois use a lei do cosseno.



$$\mathbf{r}_{BC} = \{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$r_{BC} = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-4)^2} = 5.39\ \text{m} \qquad \textbf{Ans}$$

Also,

$$\mathbf{r}_{AC} = \{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = 5.0990\ \text{m}$$

$$\mathbf{r}_{AB} = \{2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}\ \text{m}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = 3.6056\ \text{m}$$

$$\mathbf{r}_{AC} \cdot \mathbf{r}_{AB} = 0 + 4(2) + (-1)(3) = 5$$

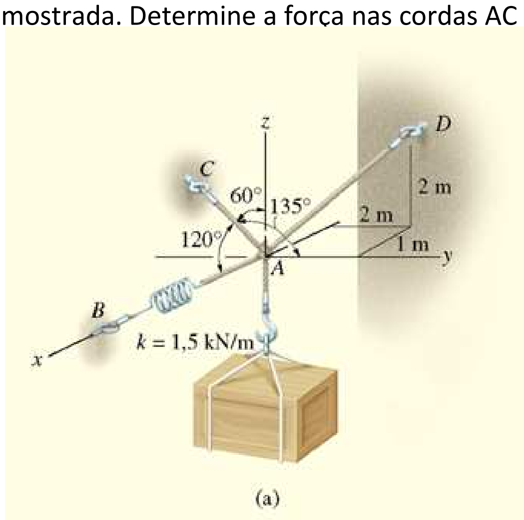
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{r}_{AC} \cdot \mathbf{r}_{AB}}{r_{AC}\, r_{AB}}\right) = \cos^{-1}\frac{5}{(5.0990)(3.6056)}$$

$$\theta = 74.219°$$

$$r_{BC} = \sqrt{(5.0990)^2 + (3.6056)^2 - 2(5.0990)(3.6056)\cos 74.219°}$$

$$r_{BC} = 5.39\ \text{m} \qquad \textbf{Ans}$$

30. A caixa de 100kgf abaixo, é suportada por três cordas, uma delas acoplada à mola mostrada. Determine a força nas cordas AC e AD e a deformação da mola.



(a)

31. Os três cabos são usados para suportar a luminária de 800 N. Determine a força desenvolvida em cada cabo para a condição de equilíbrio.

$$\Sigma F_z = 0; \qquad \frac{4}{6}F_{AD} - 800 = 0$$

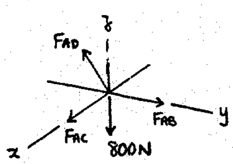
$$F_{AD} = 1.20\ \text{kN} \qquad \textbf{Ans}$$

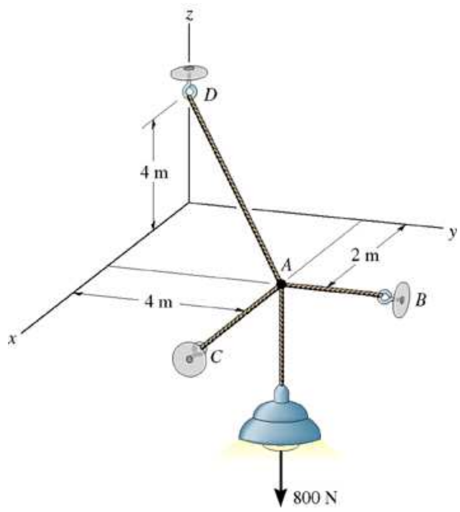
$$\Sigma F_x = 0; \qquad -\frac{2}{6}(1200) + F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = 0.40\ \text{kN} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\Sigma F_y = 0; \qquad -\left(\frac{4}{6}\right)(1200) + F_{AB} = 0$$

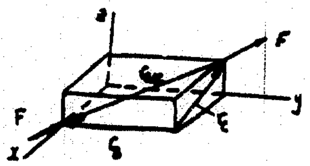
$$F_{AB} = 0.80\ \text{kN} \qquad \textbf{Ans}$$





32. Uma força $\boldsymbol{F}$ com intensidade **F = 100 N** atua ao longo da diagonal do paralelepípedo. Determine o momento de $\boldsymbol{F}$ em relação ao ponto **A**, utilizando $\mathbf{M_A = rb \times F}$ **e** $\mathbf{M_A = rc \times F}$.

$$\mathbf{F} = 100\left(\frac{-0.4\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}}{0.7483}\right)$$

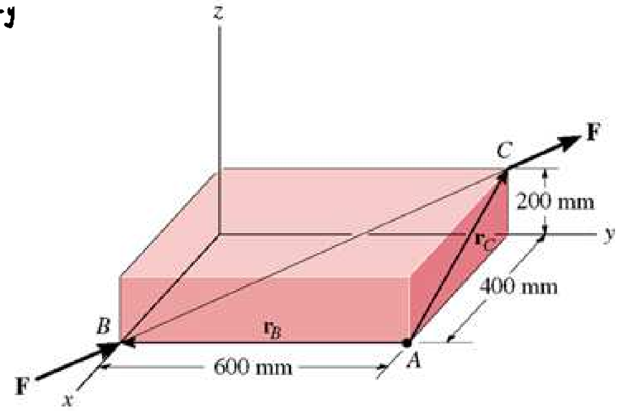


$$\mathbf{F} = \{-53.5\mathbf{i} + 80.2\mathbf{j} + 26.7\mathbf{k}\}\ \text{N}$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -0.6 & 0 \\ -53.5 & 80.2 & 26.7 \end{vmatrix} = \{-16.0\mathbf{i} - 32.1\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \text{Ans}$$

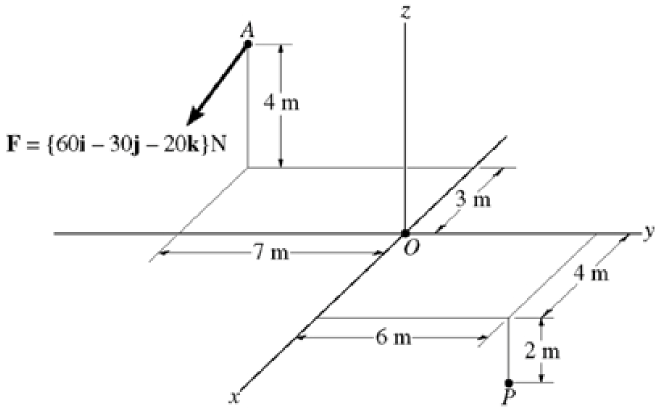
Also,

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -0.4 & 0 & 0.2 \\ -53.5 & 80.2 & 26.7 \end{vmatrix} = \{-16.0\mathbf{i} - 32.1\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \text{Ans}$$

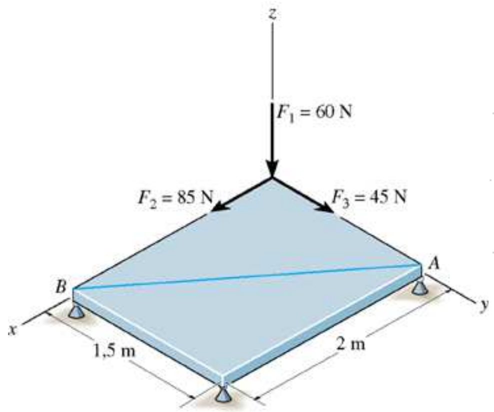


32a. Determine o momento causado no ponto O pela força aplicada em A. (Vetor Cartesiano)

32b. Determine o momento causado no ponto P pela força aplicada em A. (Vetor Cartesiano)



33. Determine a internsidade do momento de cada uma das três forças em relação ao eixo AB. Resolva o problema da forma **ESCALAR**. (2,5 pontos)



b) ***Scalar Analysis :*** Since moment arm from force $\mathbf{F}_2$ and $\mathbf{F}_3$ is equal to zero, Hence

$$(M_{AB})_2 = (M_{AB})_3 = 0 \qquad \text{Ans}$$

Moment arm d from force $\mathbf{F}_1$ to axis AB is $d = 1.5\sin 53.13° = 1.20$ m, Hence

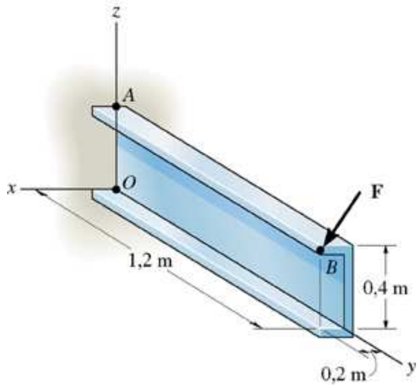
$$(M_{AB})_1 = F_1 d = 60(1.20) = 72.0\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \text{Ans}$$

34. Determine o valor do momento causado pela força F = { 600i + 300j – 600k}N no ponto A.

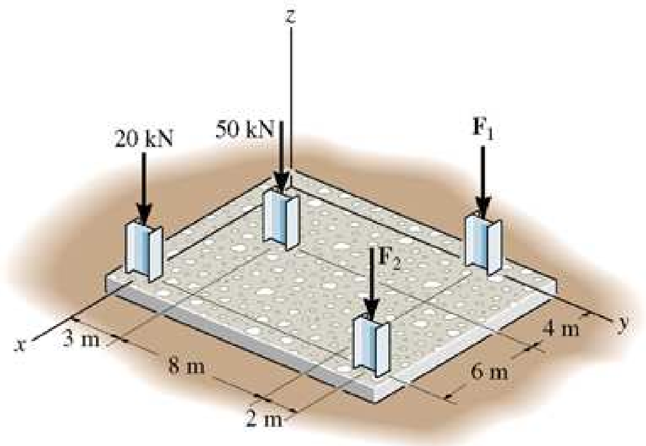
$$\mathbf{r} = \{0.2\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j}\}\ \text{m}$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.2 & 1.2 & 0 \\ 600 & 300 & -600 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = \{-720\mathbf{i} + 120\mathbf{j} - 660\mathbf{k}\}\ \text{N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans}$$



35. A laje da figura está submetida a quatro colunas paralelas com cargas. Determine a força resultante equivalente e especifique a sua posição (x, y) sobre a laje. Considere F1 = 30 kN e F2 = 40 kN.



$+\uparrow F_R = \Sigma F_z;\quad F_R = -30-50-40-20 = -140\ \text{kN} = 140\ \text{kN}\downarrow \qquad \textbf{Ans}$

$(M_R)_x = \Sigma M_x;\quad -140y = -50(3) - 30(11) - 40(13)$

$y = 7.14\ \text{m} \qquad \textbf{Ans}$

$(M_R)_y = \Sigma M_y;\quad 140x = 50(4) + 20(10) + 40(10)$

$x = 5.71\ \text{m} \qquad \textbf{Ans}$

36. Substitua as forças e todos os momentos por uma força e um momento equivalentes no ponto O. Levar, também, em consideração os momentos causados pelas forças no ponto em questão. Usar notação vetorial cartesiana.

Force And Moment Vectors :

$\mathbf{F}_1 = \{300\mathbf{k}\}$ N $\qquad \mathbf{F}_3 = \{100\mathbf{j}\}$ N

$$\mathbf{F}_2 = 200\{\cos 45°\mathbf{i} - \sin 45°\mathbf{k}\} \text{ N} = \{141.42\mathbf{i} - 141.42\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{M}_1 = \{100\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\mathbf{M}_2 = 180\{\cos 45°\mathbf{i} - \sin 45°\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m} = \{127.28\mathbf{i} - 127.28\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m}$$

Equivalent Force and Couple Moment At Point O :

$$\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}; \quad \mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 141.42\mathbf{i} + 100.0\mathbf{j} + (300 - 141.42)\mathbf{k}$$

$$= \{141\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 159\mathbf{k}\} \text{ N} \qquad \textbf{Ans}$$

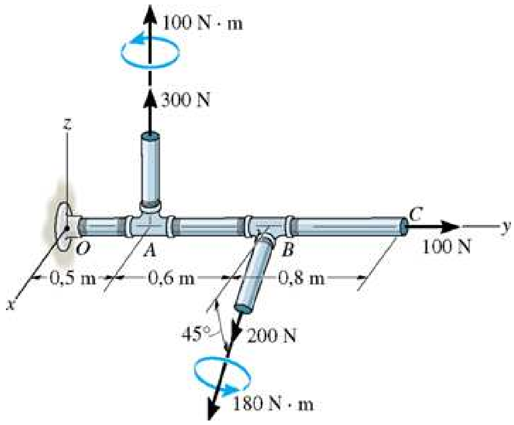
The position vectors are $\mathbf{r}_1 = \{0.5\mathbf{j}\}$ m and $\mathbf{r}_2 = \{1.1\mathbf{j}\}$ m.

$$\mathbf{M}_{R_O} = \Sigma\mathbf{M}_O; \quad \mathbf{M}_{R_O} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

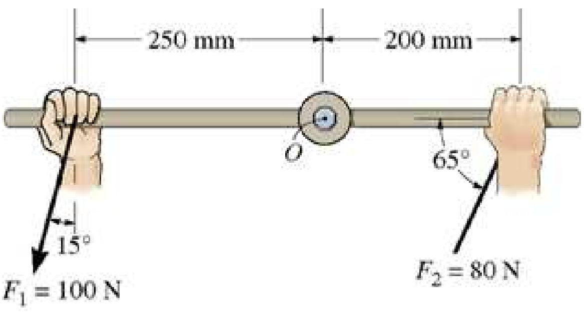
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1.1 & 0 \\ 141.42 & 0 & -141.42 \end{vmatrix}$$

$$+ 100\mathbf{k} + 127.28\mathbf{i} - 127.28\mathbf{k}$$

$$= \{122\mathbf{i} - 183\mathbf{k}\} \text{ N}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans}$$



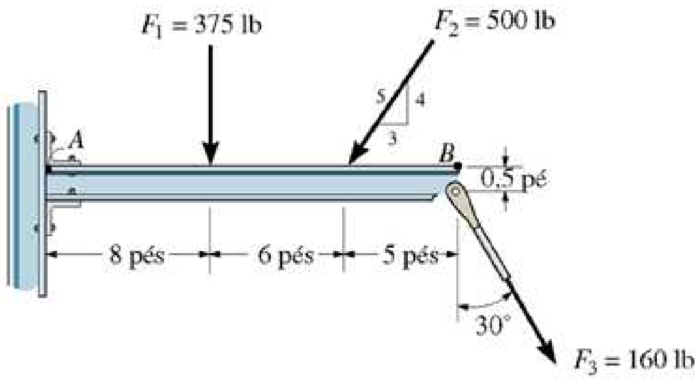
37. A chave de boca é usada para soltar o parafuso. Determine o momento de cada força em relação ao eixo do parafuso que passa através do ponto O.



$$\curvearrowleft + \ (M_{F_1})_O = 100\cos 15°(0.25) = 24.1 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\textit{Counterclockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

$$\curvearrowleft + \ (M_{F_2})_O = 80\sin 65°(0.2) = 14.5 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\textit{Counterclockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

Exercícios 37 e 38.



37. Determine o momento em relação ao ponto A de cada uma das três forças agindo sobre a viga e o momento resultante.

$$\circlearrowleft + \quad (M_{F_1})_A = -375(8)$$
$$= -3000 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 3.00 \text{ kip}\cdot\text{ft} \quad (\textit{Clockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

$$\circlearrowleft + \quad (M_{F_2})_A = -500\left(\frac{4}{5}\right)(14)$$
$$= -5600 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 5.60 \text{ kip}\cdot\text{ft} \quad (\textit{Clockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

$$\circlearrowleft + \quad (M_{F_3})_A = -160(\cos 30°)(19) + 160\sin 30°(0.5)$$
$$= -2593 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 2.59 \text{ kip}\cdot\text{ft} \quad (\textit{Clockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

38. Determine o momento em relação ao ponto B de cada uma das três forças agindo sobre a viga e o momento resultante.

$$\circlearrowleft + \quad (M_{F_1})_B = 375(11)$$
$$= 4125 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 4.125 \text{ kip}\cdot\text{ft} \quad (\textit{Counterclockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

$$\circlearrowleft + \quad (M_{F_2})_B = 500\left(\frac{4}{5}\right)(5)$$
$$= 2000 \text{ lb}\cdot\text{ft} = 2.00 \text{ kip}\cdot\text{ft} \quad (\textit{Counterclockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

$$\circlearrowleft + \quad (M_{F_3})_B = 160\sin 30°(0.5) - 160\cos 30°(0)$$
$$= 40.0 \text{ lb}\cdot\text{ft} \quad (\textit{Counterclockwise}) \qquad \textbf{Ans}$$

39. Usando a análise vetorial cartesiana determine o momento resultante das três forças em relação à base da coluna em A. Dado F1 = {400i + 300j + 120K}N.

$$(\mathbf{M}_A)_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 400 & 300 & 120 \end{vmatrix} = \{-3.6\mathbf{i} + 4.8\mathbf{j}\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\mathbf{M}_A)_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 100 & -100 & -60 \end{vmatrix} = \{1.2\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j}\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

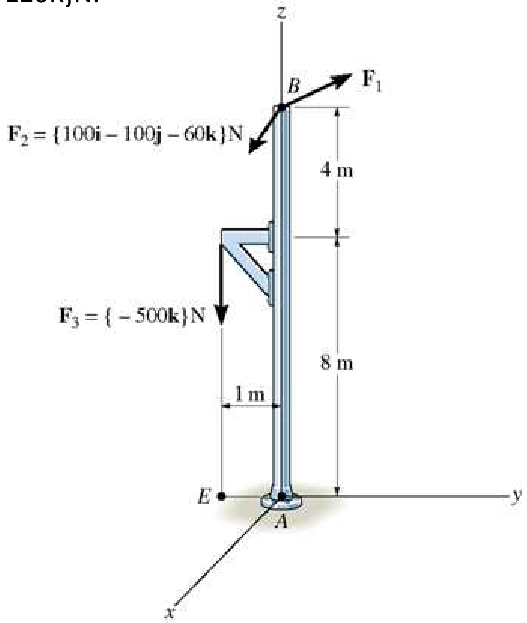
$$(\mathbf{M}_A)_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} = \{0.5\mathbf{i}\}\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{Ax} = -3.6 + 1.2 + 0.5 = -1.90\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

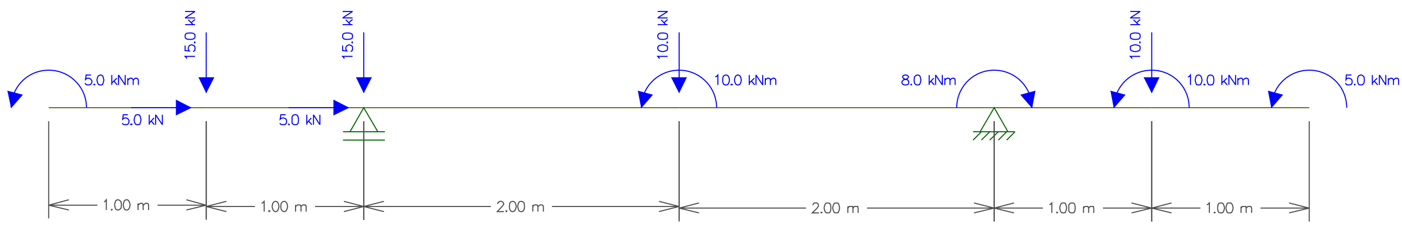
$$M_{Ay} = 4.8 + 1.2 = 6.00\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

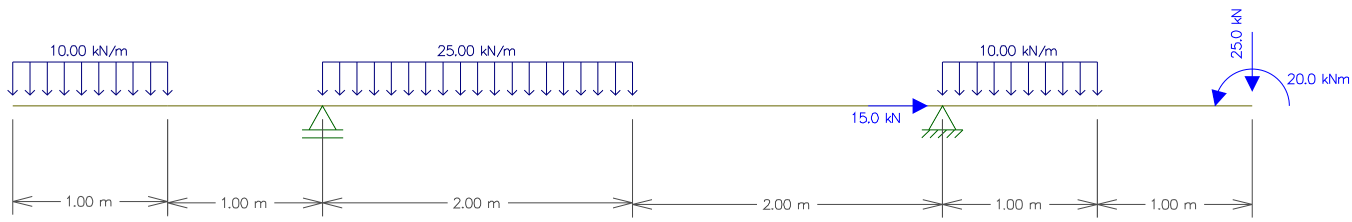
$$M_{Az} = 0$$

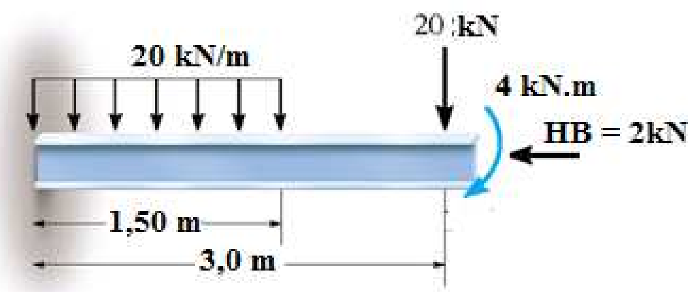
$$\mathbf{M}_R = \{-1.90\mathbf{i} + 6.00\mathbf{j}\}\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{Ans}$$

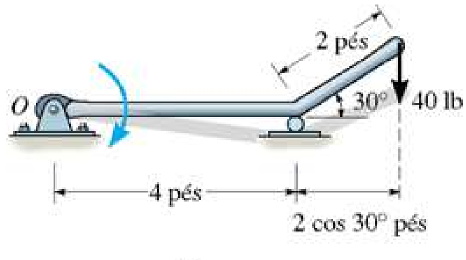


1 – Determine as reações de apoio das estruturas abaixo.

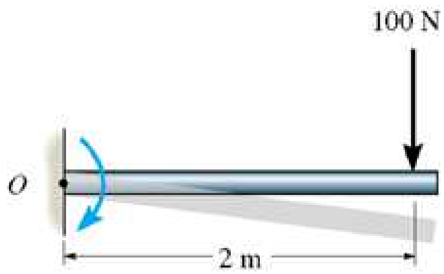




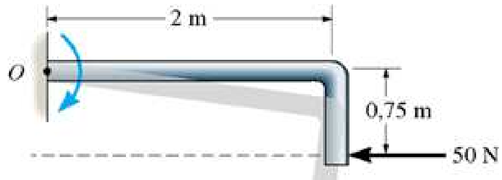




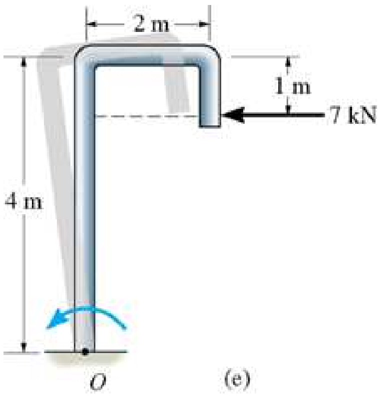
(c)


100 N
O
2 m

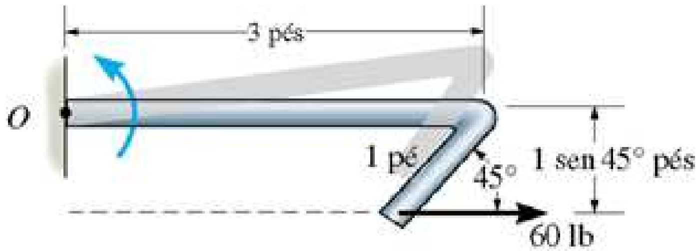
(a)


2 m
O
0,75 m
50 N

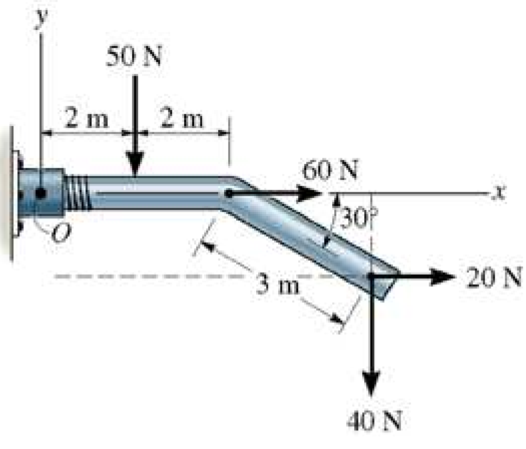
(b)


2 m
1 m
7 kN
4 m
O

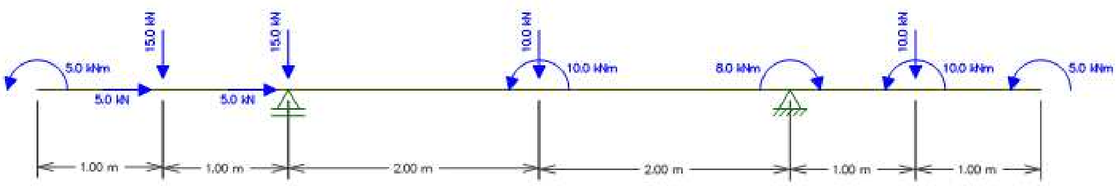
(e)


3 pés
O
1 pé
45°
1 sen 45° pés
60 lb

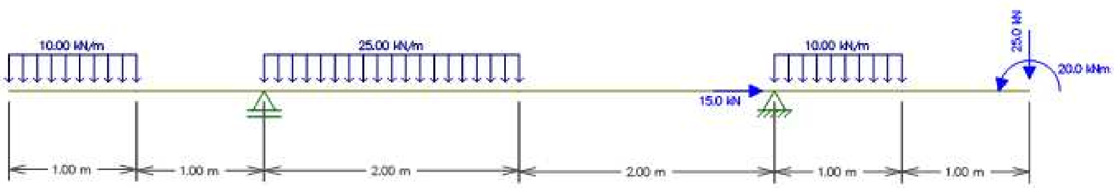
(d)


y
50 N
2 m
2 m
60 N
x
30°
O
3 m
20 N
40 N

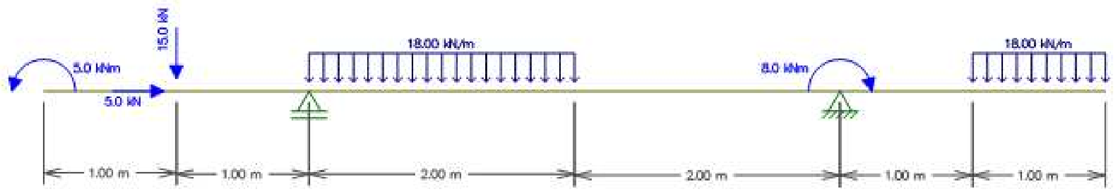
a)


5.0 kNm
15.0 kN
15.0 kN
10.0 kN
10.0 kNm
8.0 kNm
10.0 kN
10.0 kNm
5.0 kNm
5.0 kN
5.0 kN
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

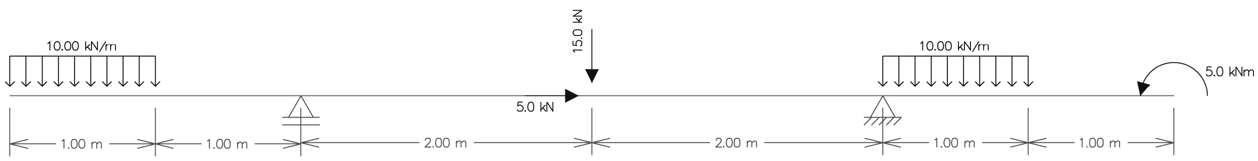
b)


10.00 kN/m
25.00 kN/m
10.00 kN/m
25.0 kN
20.0 kNm
15.0 kN
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

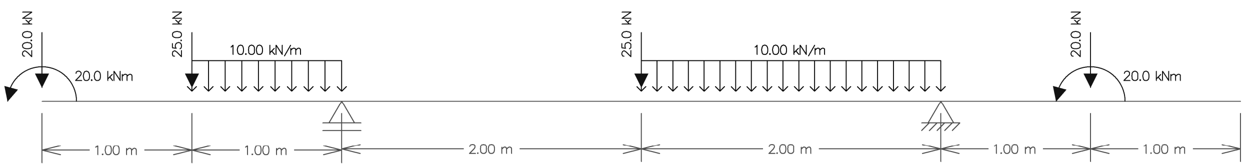
c)


15.0 kN
5.0 kNm
5.0 kN
18.00 kN/m
8.0 kNm
18.00 kN/m
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

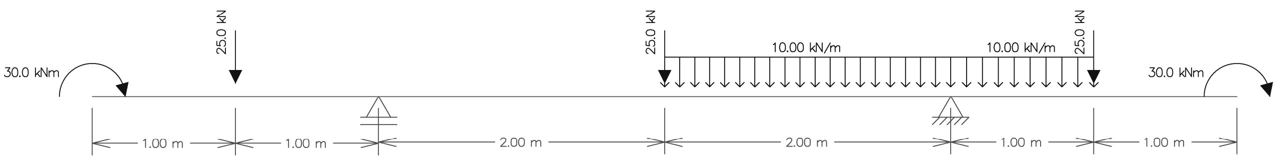
d)


10.00 kN/m
15.0 kN
10.00 kN/m
5.0 kNm
5.0 kN
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

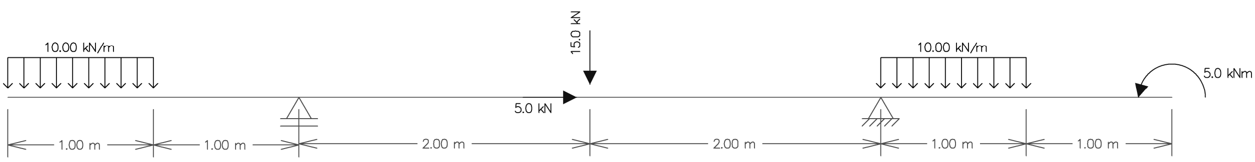
e)


20.0 kN
20.0 kNm
25.0 kN
10.00 kN/m
25.0 kN
10.00 kN/m
20.0 kN
20.0 kNm
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

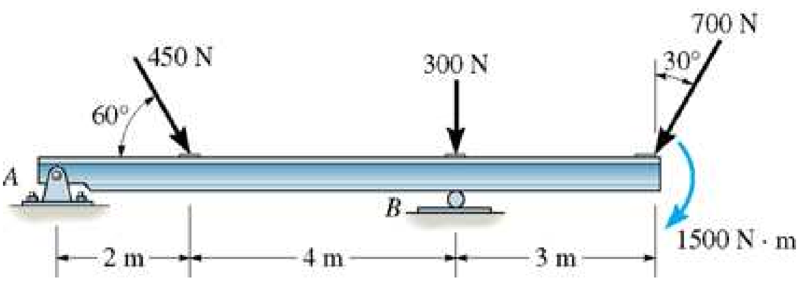
f)


30.0 kNm
25.0 kN
25.0 kN
10.00 kN/m
10.00 kN/m
25.0 kN
30.0 kNm
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

g)


10.00 kN/m
15.0 kN
10.00 kN/m
5.0 kNm
5.0 kN
1.00 m
1.00 m
2.00 m
2.00 m
1.00 m
1.00 m

h)


450 N
60°
300 N
700 N
30°
A
B
1500 N · m
2 m
4 m
3 m